Colle n$^{\text{o}}$ 10

Probabilités & suites de fonctions

Exercice 1. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. On se donne K boîtes numérotées de 1 à K. La boîte numérotée k contient k boules blanches et $K-k$ boules noires. On choisit une boîte au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans la boîte choisie, on tire indéfiniment une boule au hasard avec remise.

On note :

— pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement B_n : « la n-ième boule tirée est blanche » ;

— pour chaque $k \in [\![1, K]\!]$, l'événement C_k : « La boîte choisie est la k-ième ».

1. Montrer que la probabilité $u_{K,n}$ de l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_n$ vaut : $u_{K,n} = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \dfrac{k^n}{K^n}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{K\to\infty} u_{K,n}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_{K,n}$. Cette limite est la probabilité d'un événement : lequel et pourquoi ?

Exercice 2.

1. Soient un réel $x \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2}.$$
Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq \ell - u_{n+1} \leq (\ell - u_n) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right).$$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n.$$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \ell - u_n \leq M_n \qquad \text{où} \quad M_n = \sqrt{\frac{2}{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n.$$
6. Soit la suite des fonctions f_n définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ par
$$f_0(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x - f_n^2(x)}{2}.$$
Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$.

   Vers quelle fonction f ?
7. Cette convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$.