Feuille de T.D. n° 8

Produits scalaires

Exercice 1. Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien. On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $<\cdot\mid\cdot>$. Montrer que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Exercice 2.

1. Soient x, y et z trois réels strictement positifs. Montrer que
$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot(x+y+z) \geq 9.$$
Dans quels cas y a-t-il égalité ?
2. Soit f une fonction continue et strictement positive sur un segment $[a,b]$. Montrer que
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \geqslant (b-a)^2$$
Dans quels cas y a-t-il égalité ?

Exercice 3 (Quotient de Rayleigh)**.** Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définis par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \text{\huge 0} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \text{\huge 0} & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que
$${}^t XAX = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}.$$
2. Montrer que
$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
3. Que vaut $\frac{{}^t XAX}{{}^t XX}$ si X est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$?
4. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) \subset [0,4]$.

Exercice 4. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A\ {}^tB)$.

1. On note $\mathcal{A}_n$ le *sev* des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_n$ le *sev* des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
   (a) $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$;
   (b) $\mathcal{A}_n^\perp = \mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}_n^\perp = \mathcal{A}_n$;
   (c) pour tout $(M, S) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n$, $\|\frac{M-M^T}{2}\| \leq \|M - S\|$. Quelle est la distance $d(M, \mathcal{S}_n)$ de la matrice M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n$?
2. On considère le cas $n = 2$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

   (a) Déterminer une base de $F^\perp$ $\triangleright$ **Le corrigé propose deux méthodes.**
   (b) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par la projection orthogonale sur F $\triangleright$ **Le corrigé propose trois méthodes.**

Exercice 5. Montrer que la fonction f définie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (t - a\sin t - b\cos t)^2 dt$$

possède un minimum et calculer $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a, b)$.

Exercice 6.
1. Montrer que $< P\,|Q >= P(0)Q(0) + \displaystyle\int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes.
2. Calculer $< X^p\,|X^q >$ pour chaque entier naturel p et chaque entier naturel q.
3. Soient F l'ensemble des polynômes constants et G l'ensemble des polynômes admettant 0 pour racine. Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.
4. Déterminer l'orthogonal de F et l'orthogonal de G.
5. Montrer que la distance d'un polynôme P au sous-espace vectoriel G vaut $|P(0)|$.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. Tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n X^n$ sera aussi noté $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ où a_n est une suite nulle à partir d'un certain rang.

1. Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ la forme linéaire qui, à tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, associe le réel $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$. Montrer que l'application f est surjective.
2. Le produit scalaire de deux polynômes $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ et $Q = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ est défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout polynôme P de E,

$$|f(P)| \leq K \cdot \|P\|.$$

3. Soit F le noyau de f. Vérifier que le polynôme

$$R_{ij} = (j+1)X^j - (i+1)X^i$$

appartient à $\text{Ker}(f)$ pour tous entiers naturels i et j.
4. En déduire que $F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Remarque — L'application f est une forme linéaire non nulle, le *sev* F est donc un hyperplan. La dernière question prouve ainsi que, en dimension infinie, l'orthogonal d'un hyperplan n'est pas toujours une droite.
▷ **proposition VIII.27** & https://math-os.com/orthogonal-sev/

Exercice 8. On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P(X)|Q(X)\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ et on définit la forme linéaire $h : E \to \mathbb{R},\ P(X) \mapsto P(0)$. On suppose qu'un polynôme $A(X)$ est tel que $h(P(X)) = \langle A(X)|P(X)\rangle$ pour tout $P(X) \in E$. Calculer $\langle A(X)|XA(X)\rangle$ et conclure.

Exercice 9. Soient E un espace euclidien, u et v deux vecteurs non nuls, et f l'endomorphisme défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle v|x\rangle\, u.$$

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, dans laquelle u et v sont représentés par les vecteurs colonnes U et V. Exprimer, grâce à ces vecteurs colonnes :
   — le produit scalaire $\langle u \mid v\rangle$;
   — la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f.
2. Déterminer les noyau et image de f
3. On suppose que u n'est pas orthogonal à v. Montrer que les noyau et image de f sont supplémentaires et que f est diagonalisable. Quel est le spectre de f ?
4. On suppose que u est orthogonal à v. Déterminer $f \circ f$. Les noyau et image de f sont-ils supplémentaires ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 10 (La fonction zêta de Riemann est log-convexe)**.**

On rappelle que $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est défini pour tout $x > 1$.

On dit qu'une fonction f est **log-convexe** si la fonction f est strictement positive et si la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $x > 1$, $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$. Montrer que la fonction S_N est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et que

$$[S_N'(x)]^2 \leq S_N''(x) \cdot S_N(x)$$

pour tout $x > 1$.
2. En déduire que $[\zeta'(x)]^2 \leq \zeta''(x) \cdot \zeta(x)$ pour tout $x > 1$ ▷ **corollaire 19 du chapitre VII**.
3. Conclure que la fonction ζ est log-convexe.
4. Montrer que, si une fonction est log-convexe, alors elle est convexe.