

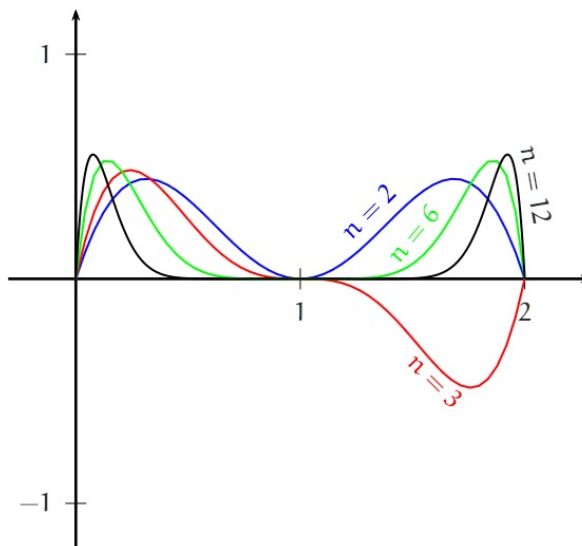
CORRIGÉ DE LA COLLE N° 09

Suites de fonctions

30 novembre 2025

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

FIGURE 1 – LA SUITE DES FONCTIONS $f_n : x \mapsto n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 2]$; vers quelle fonction f ?
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[1-b, 1+b]$ (où $b \in]0, 1[$) inclus dans $]0, 2[$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $]0, 2[$?
4. Etudier la limite, quand n tend vers ∞ , de la suite $\int_0^2 f_n(x) dx$.

1. Si $x = 0$ ou $x = 2$, alors $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Si $x \in]0, 2[$, alors $|f_n(x)| \leq n|1-x|^n = \exp(\ln(n) + n \ln|1-x|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car $0 < |1-x| < 1$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 2]$ vers la fonction nulle $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$.
2. Soit $b \in]0, 1[$. Pour tout $x \in [1-b, 1+b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq nb^n$, d'où $\sup_{[1-b, 1+b]} |f_n - f| \leq nb^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où la convergence est uniforme sur tout segment $[1-b, 1+b]$, où $b \in]0, 1[$, donc aussi sur tout segment inclus dans $]0, 2[$.
3. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in]0, 2[$ et $|f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = n|1 - \frac{1}{n}|^n \sin \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2e}$. D'où $\sup_{]0, 2[} |f_n - f|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers ∞ . Donc la convergence n'est pas uniforme sur $]0, 2[$.

4. On vérifie, par le calcul, ce que suggère le graphique : $|f_n(1-t)| = |f_n(1+t)|$ pour tout $t \in]0, 1[$. On en déduit que $\sup_{[0,2]} |f_n| = \sup_{[0,1]} |f_n|$. Or, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq n(1-x)^n \frac{\pi}{2} x = g_n(x)$. On étudie les variations de la fonction g_n sur $[0, 1]$: son maximum est $g_n(\frac{1}{n+1}) = \frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1} (1 - \frac{1}{n+1})^n \leq \frac{\pi}{2}$. D'où $|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [0, 2]$. Puis on applique le théorème de la convergence dominée pour montrer que $\int_0^2 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f(x) dx = 0$.

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

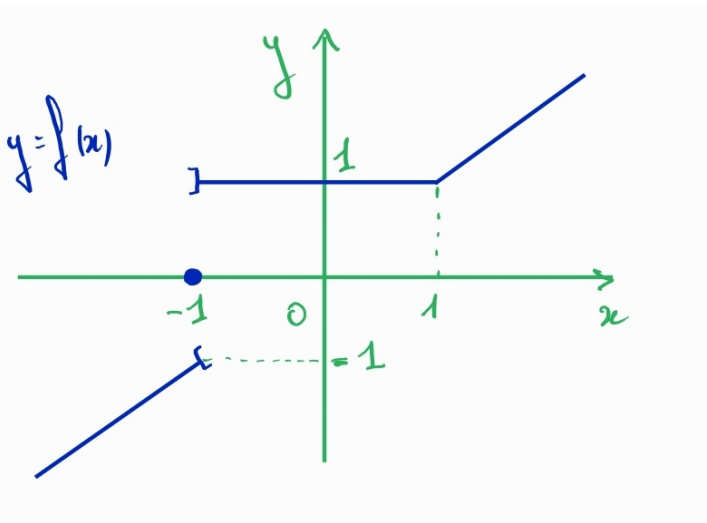
- Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} . Vers quelle fonction f ? Représenter graphiquement cette fonction f .
- La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R} ?
- Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1, +\infty[$:

$$\frac{x-1}{x^{2n}-1} \leq \frac{1}{2n}.$$

- La convergence de (f_n) vers f est-elle uniforme sur $]1, +\infty[$?
- Montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme sur $[0, 1]$.

- Si $|x| > 1$, alors $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Si $|x| < 1$, alors $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Si $x = -1$, alors $f_n(-1) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Si $x = 1$, alors $f_n(1) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \text{ si } x < -1, \quad 0 \text{ si } x = -1, \quad 1 \text{ si } -1 < x \leq 1, \quad x \text{ si } x > 1.$$



- La convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} car les fonctions f_n sont continues sur \mathbb{R} mais f n'est pas continue en -1 .
- Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x-1}{1+x^{2n}} \leq \frac{x-1}{x^{2n}-1} = \frac{1}{1+x+\dots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}.$$

- La question précédente montre que $\frac{1}{2n}$ est un majorant de la fonction $|f_n - f|$. Or le \sup est le plus petit majorant. D'où $0 \leq \sup_{]1, +\infty[} |f - f_n| \leq \frac{1}{2n}$. D'après le théorème des gendarmes, $\sup_{]1, +\infty[} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $]1, +\infty[$.

5. Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = \frac{x^{2n}(1-x)}{1+x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}(1-x)}{1-x^{2n}} \leq \frac{x^{2n}}{1+x+\dots+x^{2n-1}} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\text{car } \frac{x^{2n}}{1+x+\dots+x^{2n-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \cdot$$

Et cette inégalité reste vraie en $x=1$ car $f_n(1) = f(1) = 0$.

Ainsi $\frac{1}{2n}$ est un majorant de la fonction $|f_n - f|$ sur $[0, 1]$. D'où $\sup_{[0,1]} |f - f_n| \leq \frac{1}{2n}$ car le *sup* est le plus petit des majorants.

De plus, $\frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où $\sup_{[0,1]} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Exercice 3 (Dénombrement).

1. Soient deux entiers $n \geq p \geq 1$. Quel est le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments ?
2. Soient un entier n supérieur ou égal à 2 et $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Quel est le nombre de k -cycles du groupe symétrique S_n ?

1. Construire une injection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est :

- choisir p images dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, il y a $\binom{n}{p}$ manières ;
- construire une bijection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ vers l'ensemble de ces images, il y a $p!$ manières.

Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments vaut donc $\binom{n}{p} \cdot p! = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \cdots (n-p+1)$.

2. Construire un k -cycle du groupe symétrique S_n , c'est :

- choisir dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ les k éléments dérangés par le cycle, il y a $\binom{n}{k}$ manières ;
- ordonner ces k éléments dans une k -liste, il y a $k!$ manières ;
- remarquer que chaque cycle est représenté par k listes, on divise donc par k .

Le nombre de k -cycles du groupe symétrique S_n est donc $\binom{n}{k} \frac{k!}{k} = \binom{n}{k} (k-1)!$.