Chapitre IX Séries entières

Table des matières

Définition 1
Une série de fonctions $\sum f_n$ est appelée **une série entière** s'il existe une suite de réels a_n tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = a_n x^n.$$

Le tableau suivant résume quelques formules qui seront établies dans ce chapitre.

Série entière à connaître	Rayon de convergence
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	1
$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$	1
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k}$	1
$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$	1
$\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$	1
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$	∞
$\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k)!} x^{2k}$	∞
$\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	∞
$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	∞
$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	∞
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$	1

La dernière formule du tableau est valable pour toute puissance réelle α constante. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors les coefficients a_k sont égaux aux coefficients binomiaux $\binom{\alpha}{k}$ pour chaque $k \in [\![0, \alpha]\!]$ et sont nuls à partir du rang $\alpha + 1$. Dans le cas où $\alpha = -1$, on retrouve la deuxième formule du tableau.

Exercice 2 — *En utilisant la dernière formule du tableau, montrer que :*

$$\forall x \in]-1, +1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

IX.1 Rayon de convergence

Lemme 3 (Lemme d'Abel)
Soit un réel $x_0 > 0$. Si la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée, alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout réel $x \in]-x_0, +x_0[$.

Preuve — Si la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée, alors la suite $|a_n x_0^n|$ possède un majorant M : pour tout x réel, $|a_n x^n| \leq M \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n$. Si $|x| < |x_0|$, alors la série $\sum \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n$ converge (c'est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1), donc la série $\sum |a_n x^n|$ converge aussi. □

Ce lemme permet de répondre en partie à la question : pour quelles valeurs du réel x la série $\sum a_n x^n$ converge-t-elle ? La réponse est donnée par le théorème suivant et résumée sur la figure ci-dessous.

Théorème-Définition 4
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
— si $|x| < R$, alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument ;
— si $|x| > R$, alors la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.
R est appelé **le rayon de convergence** de la série entière et est égal à $\sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid$ la suite $a_n r^n$ est bornée$\}$.

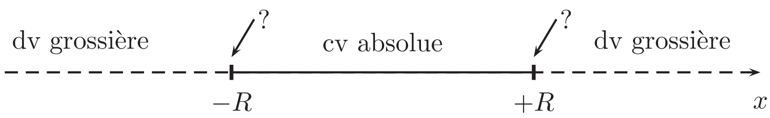

Figure IX.1 – Convergence absolue et divergence grossière

Preuve — L'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée est un intervalle I contenant au moins 0. Soit R la borne sup de I. Alors $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si $|x| < R$, alors soit $x_0 = \dfrac{|x| + R}{2}$: la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée car $0 < x_0 < R$. Donc (lemme d'Abel) la série $\sum a_n x^n$ converge absolument car $|x| < |x_0|$.

Si $|x| > R$, alors la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée, d'où elle ne tend pas vers zéro, donc la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement. □

Remarque 5 —

$$\begin{aligned} R &= \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \textit{la série } \textstyle\sum a_n r^n \textit{ converge}\} &&= \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \textit{la série } \textstyle\sum |a_n r^n| \textit{ converge}\} \\ &= \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \textit{la suite } a_n r^n \textit{ est bornée}\} &&= \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \textit{la suite } a_n r^n \textit{ tend vers } 0\}. \end{aligned}$$

Le cas où $R = +\infty$ signifie : La série entière converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 6 — *Pour quelles valeurs de x la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge-t-elle ?*
— *Si $x = 0$, alors la série converge vers 1 ;*
— *Si $x \neq 0$, alors soit $u_n = \frac{x^n}{n!}$: $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0<1$, d'où (critère de D'Alembert) la série $\sum u_n$ converge absolument.*
Donc la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et son rayon de convergence est $R = +\infty$.

Le cas où $R = 0$ signifie : La série entière converge pour $x = 0$ et diverge pour tout $x \neq 0$.

Exemple 7 — *Pour quelles valeurs de x la série entière $\sum n^n x^n$ converge-t-elle ?*
— *Si $x = 0$, alors la série converge vers 0 ;*
— *Si $x \neq 0$, alors soit $u_n = n^n x^n = (nx)^n$. À partir d'un certain rang, $n|x| \geq 2$, d'où $|nx|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où la suite u_n ne tend pas vers zéro, d'où la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
Donc la série entière $\sum n^n x^n$ ne converge qu'en 0 et son rayon de convergence est $R = 0$.

Dans le cas où $R \in]0, +\infty[$ **:** le théorème 4 ne dit rien sur la convergence **aux bords** de l'intervalle de convergence. Il y a trois cas possibles :

a) La série entière peut diverger aux deux bords.

Exemple 8 — *Pour quelles valeurs de x la série entière $\sum x^n$ converge-t-elle ?*

- *Si $|x| \geq 1$, alors la suite x^n ne tend pas vers zéro, donc la série $\sum x^n$ diverge (grossièrement) ;*
- *Si $|x| < 1$, alors la série $\sum |x|^n$ converge (car c'est une série géométrique de raison $|x| < 1$), d'où la série $\sum x^n$ converge absolument.*

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est $R = 1$. Mieux : cette série converge sur l'intervalle $]-1, +1[$ et diverge ailleurs.

b) La série entière peut converger à un bord et diverger à l'autre bord.

Exemple 9 — *Pour quelles valeurs de x la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ converge-t-elle ?*

Cette série entière :

- *diverge si $x = 1$ car la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, d'où $R \leq 1$;*
- *converge si $x = -1$ car $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (théorème des séries alternées), d'où $R \geq 1$.*

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ est $R = 1$. Mieux : cette série converge sur l'intervalle $[-1, +1[$ et diverge ailleurs.

c) La série entière peut converger aux deux bords.

Exemple 10 — *Pour quelles valeurs de x la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge-t-elle ?*

- *Si $|x| > 1$, alors la suite $\frac{|x|^n}{n^2}$ ne tend pas vers zéro (pourquoi ?) , d'où la série $\sum \frac{x^n}{n^2}$ diverge grossièrement, d'où $R \leq 1$.*
- *Les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ convergent, d'où $R \geq 1$.*

Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ est $R = 1$. Mieux : la série converge sur l'intervalle $[-1, +1]$ et diverge ailleurs.

Proposition 11
1. Si à partir d'un certain rang $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.
2. Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
3. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Preuve —

1. $|a_n x^n| \leq |b_n x^n|$, d'où : si la suite $(b_n x^n)$ est bornée, alors la suite $(a_n x^n)$ aussi. Donc $R_b \leq R_a$.
2. Si $a_n = O(b_n)$, alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, à partir d'un certain rang, $|a_n| \leq M|b_n|$. Or la série entière $\sum M b_n x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum b_n x^n$, donc $R_b \leq R_a$.
3. Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$, d'où $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$.

□

Exercice 12 — *Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum e^{\cos(n)} x^n$ et $\sum \dfrac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} \cdot x^n$.*

IX.2 Convergence normale et continuité

Théorème 13
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et R son rayon de convergence.
1. La série entière converge normalement (donc uniformément) sur tout segment inclus dans $]-R, +R[$.
2. La somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]-R, +R[$.

Preuve —

1. Soient un segment $[\alpha,\beta] \subset]-R,+R[$ et $r = \max(|\alpha|,|\beta|)$. Pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, $|a_n x^n| \leq |a_n r^n|$. Et la série $\sum |a_n r^n|$ converge car r appartient à l'intervalle de convergence $]-R,+R[$. Donc la série entière converge normalement sur $[\alpha,\beta]$.
2. Soit $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[\alpha,\beta]$, et la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$, donc (théorème VII.9) la somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est aussi continue sur $[\alpha,\beta]$.

   La somme est continue sur tout segment $[a,b] \subset]-R,+R[$, donc la somme est continue sur l'intervalle ouvert $]-R,+R[$.

□

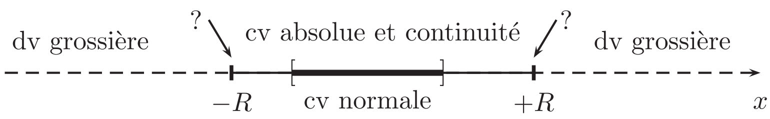

Figure IX.2 – Convergence normale, convergence absolue et divergence grossière

Le théorème suivant (que nous admettons) renseigne sur la continuité (de la somme) à un bord de l'intervalle de convergence (de la série entière).

> Théorème 14 (d'Abel radial)
> Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

IX.3 Intégrer

> Théorème 15
> Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$.
> 1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est aussi égal à R.
> 2. $\forall x \in]-R,+R[, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt.$

Ce théorème dit que : on peut intégrer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence.

Preuve —

1. Soit r le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.
   - * $r \geq R$ car : $|\frac{a_n}{n+1} x^{n+1}| \leq |a_n||x|^{n+1} \leq |x| \cdot |a_n x^n|$.

     Si $|x| < R$, alors $\sum |a_n x^n|$ converge, d'où $\sum |\frac{a_n}{n+1} x^{n+1}|$ converge, d'où $|x| \leq r$, donc $r \geq R$.
   - ** $r \leq R$ car : si $|x| < r$, alors il existe un réel y tel que $|x| < y < r$.

     D'où $|a_n x^n| = \frac{1}{y} \cdot \left|\frac{a_n}{n+1} y^{n+1}\right| \cdot \left[(n+1)\left|\frac{x}{y}\right|^n\right] \to \frac{1}{y} \cdot 0 \cdot 0$, d'où $|x| \leq R$, donc $r \leq R$.

   Donc $r = R$.
2. D'après le théorème 13, la série entière converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0,x][$ (ou $[x,0]$ si $x < 0$), d'où (théorème VII.14) on peut intervertir $\int_0^x$ et $\sum_{n=0}^{\infty}$.

□

Exemple 16 — ** Le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n x^{2n}$ est $R = 1$;*

** *et, pour tout* $x \in]-1,+1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$.

D'où :

* *le rayon de convergence de la série entière* $\sum(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *est aussi* $R = 1$ *;*

** *et, pour tout* $x \in]-1,+1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$.

De même, pour tout $x \in]-1,+1[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} = \ln(1+x).$$

Exercice 17 — *Montrer que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} \qquad \textit{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2).$$

IX.4 Dériver

Théorème 18
Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$.

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum n\, a_n\, x^{n-1}$ est aussi égal à R.
2. $\forall x \in]-R,+R[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$.
3. La somme $f\ :]-R,+R[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ce théorème dit que : on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence.

Preuve —

1. Si on intègre terme à terme $\sum n\, a_n\, x^{n-1}$, alors on obtient $\sum a_n x^n$, d'où (théorème 15) ces deux séries entières ont le même rayon de convergence.
2. Soient, pour tout $x \in]-R,+R[$, $F(x) = \sum a_n x^n$ et $f(x) = \sum n\, a_n\, x^{n-1}$. D'après le théorème 15, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. De plus, f est continue (théorème 13), donc $F' = f$.
3. Par récurrence.

□

Exercice 19 — *Déterminer le rayon de convergence* R *de la série entière* $\displaystyle\sum \frac{n+5}{(n+1)(n+2)} x^n$ *et calculer la somme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{(n+1)(n+2)} x^n$ *pour tout* $x \in]-R,+R[$.

Exemple 20 (Séries entières & équations différentielles) —

1. *La fonction exponentielle est définie par*

$$\boxed{\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots.} \qquad (*)$$

D'après l'exemple 6, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ *est* $+\infty$*, d'où* exp *est bien définie sur tout* $\mathbb{R}$*. D'après le théorème 18, on peut dériver terme à terme la série entière sans changer son rayon de convergence, d'où :* exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $x \in]-\infty, +\infty[$, $\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$*. En outre* $\mathrm{e}^0 = 1$ *d'après* $(*)$*. L'exponentielle est donc l'unique solution de l'équation différentielle* $y'(x) = y(x)$ *vérifiant la condition initiale* $y(0) = 1$.

2. *Soient un réel* α *et, pour chaque* $n \in \mathbb{N}$*, un coefficient* a_n *défini par*

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{si } n > 0.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x_n$ *est 1 car (critère de D'Alembert) :*

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n, \text{ d'où } \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|. \text{ Soit, pour chaque } x \in]-1,+1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

D'après le théorème 18, on peut dériver terme à terme la série entière sans changer son rayon de convergence, d'où : pour tout $x \in]-1, +1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha - n)a_n x^n = \alpha f(x) - x f'(x).$$

La fonction f *est donc une solution, sur l'intervalle* $]-1, +1[$*, de l'équation différentielle*

$$(1+x)y'(x) = \alpha y(x).$$

D'où $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1, +1[,\ f(x) = K \cdot (1+x)^\alpha$*. En outre,* f *vérifie la condition initiale* $f(0) = a_0 = 1$.

Donc $f(x) = (1+x)^\alpha$ *pour tout* $x \in]-1, +1[$*, ce qui prouve la dernère ligne du tableau dressé au début du chapitre.*

IX.5 (Ne pas) être développable en série entière

Définition 21
Soit $r \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. On dit qu'une fonction f est **développable en série entière** sur $]-r, +r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ qui a un rayon de convergence $R \geq r$ telle que :

$$\forall x \in]-r, +r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Exemple 22 — *La fonction* $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ *est définie sur* $]-\infty, +1[$ *et développable en série entière sur* $]-1, +1[$*. D'après l'exemple 16, la fonction* arctan *est définie sur* $]-\infty, +\infty[$ *et développable en série entière sur* $]-1, +1[$.

Remarque 23 —

1. *D'après le théorème 18 , si une fonction f est développable en série entière sur $]-r,+r[$ alors :*
   — *elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,+r[$;*
   — *son D.S.E. est unique et* $\forall x \in]-r,+r[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$
2. *Et réciproquement ? Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors :*
   — *on peut définir la série entière* $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *appelée* **la série de Taylor** *de la fonction f ;*
   — *mais f est développable en série entière* $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'exercice 24 fournit un contre-exemple.*

Exercice 24 — *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \neq 0, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

1. *Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^*$ et il existe un polynôme P_n tel que*
$$\forall x \neq 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \cdot \mathrm{e}^{-1/x^2}.$$
2. *Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$.*
3. *En déduire que la fonction f n'est pas développable en série entière.*

Proposition 25
Soit $r \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Une fonction f est D.S.E. sur $]-r,+r[$ si, et seulement si :

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,+r[$;
2. pour chaque $x \in]-r,+r[$, $\quad R_N(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad$ où $R_N(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$

Preuve — Si f est *D.S.E*, alors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,+r[$ et la série $\sum a_n x^n$ converge pour chaque $x \in]-r,+r[$. Le reste $R_N(x) = \displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} a_n x^n$ tend donc vers zéro quand N tend vers ∞.

Réciproquement, si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,+r[$, alors, à chaque ordre N :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x).$$

Soit $x \in]-r,+r[$: si $R_N(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Donc f est D.S.E. sur $]-r,+r[$. □

Exercice 26 — *En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ceci prouve deux des formles du tableau dressé au début du chapitre et donc que les fonctions cos et sin sont D.S.E. sur $\mathbb{R}$.

IX.6 Produit de Cauchy et somme de deux séries entières

Le produit de Cauchy ou la somme de deux séries entières est encore une série entière.

Proposition 27

Soit R_a le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$. Soit R_b le rayon de convergence d'une série entière $\sum b_n x^n$.

1. Soit $c_n = a_n + b_n$. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n x^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ (supérieur ou égal si $R_a = R_b$) et :
$$\text{si } |x| < \min(R_a, R_b), \text{ alors } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$
2. Soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n x^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$ et :
$$\text{si } |x| < \min(R_a, R_b), \text{ alors } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

Preuve —

1. La somme de deux séries convergentes est convergente, d'où $R \geq \min(R_a, R_b)$. Si $R_a \neq R_b$, alors : pour tout $x \in]\min(R_a, R_b), \max(R_a, R_b)[$, $\sum c_n x^n$ est la somme d'une série divergente et d'une série convergente, d'où c'est une série divergente, donc $R = \min(R_a, R_b)$.
2. D'après le théorème du produit de Cauchy :
   - le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente, d'où $R \geq \min(R_a, R_b)$;
   - sa somme est le produit des sommes.

□

Exemple 28 —

1. *Le produit de Cauchy des séries entières* $\sum a_n x^n = \sum x^n$ *et* $\sum b_n x^n = 1 - x$ *est la série entière*
$$\sum c_n x^n = 1, \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}.$$
Les rayons de convergence sont $R_a = 1$, $R_b = +\infty$ *et* $R = +\infty$.
2. *La série entière* $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$ *est le produit de Cauchy de* $\sum_{n\geq 0} x^n$ *et* $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$. *D'où (proposition 27) :*
   (a) *son rayon de convergence est* $R \geq \min(1, +\infty)$, *or* $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ *diverge, d'où* $R \leq 1$, *donc* $R = 1$ *;*
   (b) *pour tout* $x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 29 — *Montrer que :*
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^x \cdot e^y = e^{x+y}.$$

IX.7 Séries entières complexes

Soient un nombre complexe z et une suite de complexes a_n. Pour étudier la convergence d'une série entière complexe $\sum a_n z^n$, il suffit d'utiliser le théorème 4 en remplaçant $|x|$ (valeur absolue du réel x)

par $|z|$ (module du complexe z). Vocabulaire : bien qu'il s'agisse du module, on dit encore que la série complexe converge absolument. Les énoncé et preuve sont alors les mêmes. Par conséquent :

– le rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de la série entière complexe $\sum a_n z^n$ est encore égal à $\sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{ la suite } a_n r^n \text{ est bornée}\}$;

– l'intervalle ouvert de convergence $]-R, +R[$ sur la droite réelle $\mathbb{R}$ devient **le disque ouvert de convergence** $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Sur ce disque ouvert, la série entière converge absolument, c'est-à-dire $\sum |a_n z^n|$ converge, où $|a_n z^n|$ est le module du nombre complexe $a_n z^n$) ;

– les deux bords $-R$ et $+R$ de l'intervalle deviennent le cercle de rayon R. L'incertitude aux bords (converge ou diverge en $\pm R$?) devient l'incertitude sur le cercle (converge ou diverge, en chaque point du cercle ?) et on appelle ce cercle **le cercle d'incertitude**.

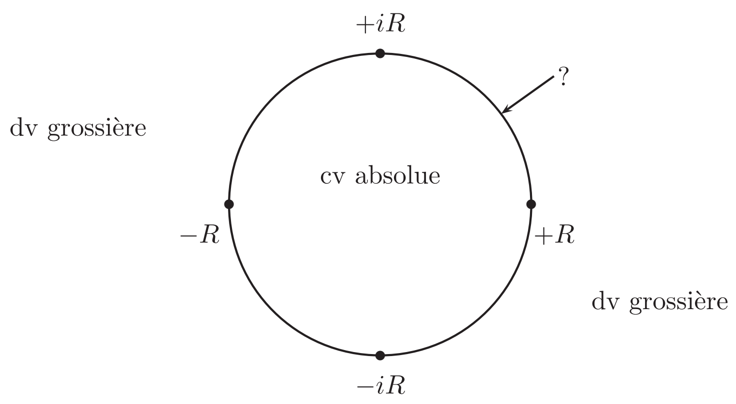

FIGURE IX.3 – Disque ouvert de convergence et cercle d'incertitude

EXEMPLE 30 — *Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est $R = 1$. Et, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$. On peut donc définir, pour chaque $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

EXERCICE 31 — *Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

En se rappelant que le théorème du produit de Cauchy reste valable pour les séries complexes :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

En particulier, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{x+i\theta} = e^x \cdot (\cos\theta + i \sin\theta).$$