D.S. n$^{\text{o}}$ 4 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient quatre exercices indépendants.

Dans chaque exercice, on peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 (Centrale PSI 2024 Math 2)**.**

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ est convergente.

2) Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

3) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

4) Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On notera γ sa limite.

5) Soit, pour tout $t > 0$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t}\right)$. Montrer que la fonction f est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$.

6) Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t > 0$, $S_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{-kt} - \frac{\mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\right)$. Montrer que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$: vers quelle fonction ?

7) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1}\right)$.

8) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \gamma$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2024 Math)**.**

1) La fonction $x \mapsto \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt$ est appelée **la fonction Gamma d'Euler**.

Montrer que le réel $\Gamma(x)$ est défini si, et seulement si, $x > 0$.

2) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ est une intégrale convergente. On admet que sa valeur est $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

4) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{et} \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n!\, 4^n} \sqrt{\pi}.$$

5) Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } \; t \in]0, n[\\ 0 \text{ si } \; t \geq n \end{cases}$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$: vers quelle fonction f ?

6) Soit $x > 0$. Montrer que l'intégrale $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$ converge pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et que

$$I_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

7) Soit $x > 0$. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\, dt$ converge et que

$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1).$$

En déduire une expression de $J_n(x)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$.

8) Soit $x > 0$. Montrer que $I_n(x) = n^x\, J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire **l'identité d'Euler** :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

9) Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $x > 0$. Montrer que :

$$\Gamma(x+n) \underset{n \to \infty}{\sim} (n-1)!\, n^x.$$

10) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n)$. Montrer que :

$$u_{n+1} - u_n = \underset{n \to \infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

11) En déduire qu'il existe un réel K tel que $n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^K \sqrt{n}$.

12) Déduire des questions précédentes la valeur du réel e^K (ce qui prouvera **la formule de Stirling**).

Exercice 3 (CCP 2008 MP Math 2)**.**

Toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier tel que $n \geq 2$.

— On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec une occurrence égale à leur multiplicité, c'est-à-dire :

$$A \text{ est à diagonale propre} \iff \chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$$

— On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour « A est une matrice à diagonale propre ».

— On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

— On notera également $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

1) Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $C = aA + bI_n$ et $C' = a{}^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre. *(On pourra distinguer le cas $a = 0$)*

2) On note G_n l'ensemble des matrices à diagonale propre inversibles. Démontrer que :

$$\forall A \in \mathcal{E}_n, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geqslant p_0, \quad A - \frac{1}{p} I_n \in G_n$$

3) Matrices trigonalisables

a) Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?

b) Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.

4) Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre.
$\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

*On pourra utiliser **sans démonstration** le résultat suivant appelé **théorème spectral** :*

> Tout élément de $\mathcal{S}_n$ est diagonalisable. Plus précisément, si $A \in \mathcal{S}_n$, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'inverse ${}^tP$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

5) Matrices symétriques à diagonale propre

a) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

b) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

6) Matrices antisymétriques à diagonale propre

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

a) Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $({}^tAA)^n$.

b) Justifier que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable puis que ${}^tAA = 0$.

c) Conclure que A est la matrice nulle.

Exercice 4 (XENS 2012 MP Math A)**.**

On se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, et des endomorphismes non nuls e, f, g de E tels que

$$\begin{aligned} e \circ f - f \circ e &= -2g \\ f \circ g - g \circ f &= -2e \\ g \circ e - e \circ g &= -2f \end{aligned}$$

On note $w = f - ig$ et $z = f + ig$.

1) Calculer $\quad e \circ z - z \circ e, \quad e \circ w - w \circ e \quad$ et $\quad z \circ w - w \circ z$.

2) Soit v un vecteur propre de e, associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que
$$e(z^k(v)) = \mu_k z^k(v).$$

3) Montrer qu'il existe un vecteur propre v_0 de e, associé à une valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, et tel que $z(v_0) = 0$.

4) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = w^k(v_0)$. Calculer $e(v_k)$ en fonction de k, λ_0 et v_k.

Calculer $z(v_k)$ en fonction de k, λ_0 et v_{k-1}.

5) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que v_{n+1} soit nul et $v_0, ..., v_n$ soient linéairement indépendants.