Corrigé de la colle n° 10

Probabilités & suites de fonctions

30 novembre 2025

Exercice 1. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. On se donne K boîtes numérotées de 1 à K. La boîte numérotée k contient k boules blanches et $K-k$ boules noires. On choisit une boîte au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans la boîte choisie, on tire indéfiniment une boule au hasard avec remise.

On note :

— pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement B_n : « la n-ième boule tirée est blanche » ;
— pour chaque $k \in [\![1, K]\!]$, l'événement C_k : « La boîte choisie est la k-ième ».

1. Montrer que la probabilité $u_{K,n}$ de l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_n$ vaut : $u_{K,n} = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \dfrac{k^n}{K^n}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{K\to\infty} u_{K,n}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_{K,n}$. Cette limite est la probabilité d'un événement : lequel et pourquoi ?

---

1. On utilise la formule des probabilités totales : $(C_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements, d'où

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap \ldots \cap B_n) &= \sum_{k=1}^{K} P(C_k)P(B_1 \cap \ldots \cap B_n | C_k) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{K}\frac{k^n}{K^n} \end{aligned}$$

où $P(B_1 \cap \ldots \cap B_n | C_k) = \left(\dfrac{k}{K}\right)^n$ car les événements $B_1, \cdots, B_n$ sont indépendants **pour la probabilité conditionnelle** P_{C_k} car le tirage se fait toujours dans la même urne et avec remise.

2. Première méthode : en reconnaissant une somme de Riemann. La fonction $f : t \mapsto t^n$ est <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[0,1]$, d'où $\dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=1}^{K} f\left(k \cdot \frac{1}{K}\right) \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$. Donc $u_{K,n} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n+1}$.

Seconde méthode : en comparant série et intégrale. La fonction $t \mapsto t^n$ est continue et croissante. D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{k-1}^{k} t^n dt \leq k^n \leq \int_k^{k+1} t^n dt$$

Donc, en sommant :

$$\frac{K^{n+1}}{n+1} = \int_0^K t^n dt \leq \sum_{k=1}^{K} k^n \leq \int_1^{K+1} t^n dt = \frac{(K+1)^{n+1}}{n+1} - 1$$

Or $\dfrac{(K+1)^{n+1}}{n+1} - 1$ est équivalent à $\dfrac{K^{n+1}}{n+1}$ quand K tend vers ∞.

D'où

$$\sum_{k=1}^{K} k^n \underset{K\to\infty}{\sim} \frac{K^{n+1}}{n+1}. \qquad \heartsuit$$

Donc $u_{K,n} \underset{K\to\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$ tend vers $\frac{1}{n+1}$ quand K tend vers l'infini.

3. Dans la somme (finie) $\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{K} \frac{k^n}{K^n}$, les $K-1$ premiers termes tendent vers zéro et le dernier vaut $\frac{1}{K}$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_{K,n} = \dfrac{1}{K}$.

   D'après le théorème de la continuité décroissante, $\lim_{n\to\infty} P\left(\cap_{i=1}^{n} B_i\right) = P\left(\cap_{i\in\mathbb{N}^*} B_i\right)$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_{K,n}$ est la probabilité de l'événement $\cap_{i\in\mathbb{N}^*} B_i$: « tirer indéfiniment des boules blanches ».

Exercice 2.

1. Soient un réel $x \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2}.$$
   Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq \ell - u_{n+1} \leq (\ell - u_n) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right).$$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n.$$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \ell - u_n \leq M_n \qquad \text{où} \quad M_n = \sqrt{\frac{2}{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n.$$
6. Soit la suite des fonctions f_n définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ par
$$f_0(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x - f_n^2(x)}{2}.$$
   Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$.

   Vers quelle fonction f ?
7. Cette convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$?

Exercice 2 de la colle 10 (corrigé):

1. On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$t \longmapsto t + \frac{x - t^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{x}{2}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Montrons que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

Soit $t \in [0,1]$.

f est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$, $f'(t) = -t + 1 \geqslant 0$

donc

t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\frac{x}{2}$	$\nearrow$	$\frac{x+1}{2}$

et $\begin{cases} \frac{x}{2} \geqslant 0 \\ \frac{x+1}{2} \leqslant 1 \end{cases}$

D'où $f([0,1]) = \left[\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}\right] \subset [0,1]$

Ainsi, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$

α

* $u_0 = 0 \in [0,1]$
* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n \in [0,1]$.

  Alors $f(u_n) = u_{n+1} \in [0,1]$.

Non : $f \nearrow \not\Rightarrow (u_n) \nearrow$

Par contre :

$f \nearrow$ et $u_1 \geqslant u_0 \Rightarrow \forall n, u_{n+1} \geqslant u_n$

2. On a montré que f est croissante sur $[0,1]$, de plus $u_1 = \frac{x}{2} \geqslant u_0 = 0$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Et majorée d'après la question 1.

α

D'où d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel l.

De plus, l est un point fixe de f car f est continue, d'où : $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(l)$

~~D'où, en posant $l = \lim_{n \to +\infty} u_n \in [0,1]$~~,

$$f(l) = l \iff l = l + \frac{x - l^2}{2}$$
$$\iff x = l^2$$
$$\iff l = \sqrt{x}$$

$l \in [0,1]$ car $\forall n$, $u_n \in [0,1]$.

Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{x}$

3. ~~D'après q1, $f([x,1]) = [\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}]$~~

~~Donc~~ $u_1 = \frac{x}{2}$ et (u_n) est croissante d'après q2.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{2} \leq u_n \leq 1$

Or, $\forall t \in [\frac{x}{2}, 1]$, $0 \leq f'(t) = 1 - t \leq 1 - \frac{x}{2}$ qui est un majorant

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur $[u_n, l]$ et dérivable sur $]u_n, l[$

$\subset [\frac{x}{2}, 1]$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$0 \leq f(l) - f(u_n) \leq (l - u_n)(1 - \frac{x}{2})$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq l - u_{n+1} \leq (l - u_n)(1 - \frac{x}{2})$

4. Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq l - u_n \leq l(1 - \frac{x}{2})^n$

* pour $n = 0$: $l - u_0 = l$

donc $0 \leq l \leq l(1 - \frac{x}{2})^0$

* pour $n = 1$: ~~$0 \leq l - u_1 \leq l - u_0 = l$ car $l \geq u_1 \geq 0$~~

$l - u_1 = \sqrt{x} - \frac{x}{2} \geq 0$ car $\sqrt{x} \geq x$ car $x \in [0,1]$

De plus, $l(1 - \frac{x}{2}) = \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{2}$

et $x^{3/2} \leq x$ car $x \in [0,1]$ ~~donc~~

Donc $0 \leq l - u_1 \leq l(1 - \frac{x}{2})$

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $0 \leq l - u_n \leq l(1 - \frac{x}{2})^n$

Alors d'après la question 3,

$0 \leq l - u_{n+1} \leq (l - u_n)(1 - \frac{x}{2})^n$

donc par hypothèse de récurrence :

$0 \leq l - u_{n+1} \leq l(1 - \frac{x}{2})^{n+1}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$

On pose $\gamma : x \longmapsto \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{2}\right)^n$

$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

γ est dérivable ~~sur~~ sur $]0,1]$

$$\forall x \in]0,1], \quad \gamma'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{x}{2}\right)^n - \frac{n\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(-n\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Si $n \geq 1$: $-n\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \geq 0 \iff +nx + \frac{x}{2} - 1 \leq 0$

$\iff x \leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{1+2n}$

Donc

x	0		$\frac{2}{1+2n}$		1
$\gamma'(x)$		$+$	0	$-$	
$\gamma(x)$		$\nearrow$	M_n	$\searrow$	

Et si $n = 0$: $\ell \cdot \left(1-\frac{x}{2}\right)^0 = \sqrt{x}$

$M_0 = \sqrt{2} \geq \sqrt{x}$ car $x \in [0,1]$

D'où, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \ell \cdot \left(1-\frac{x}{2}\right)^n \leq M_n = \sqrt{\frac{2}{1+2n}}\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n}$

6. Soit $x \in [0,1]$.

Alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme définie à la q1.

Donc d'après q2, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{x}$

Donc la suite de fonctions (f_n) CVS vers $x \longmapsto \sqrt{x}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors d'après q.5,

$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant \sqrt{x} - f_n(x) \leqslant M_n$ qui est un majorant

d Donc $0 \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |\sqrt{x} - f_n(x)| \leqslant M_n$ car le sup est le plus petit majorant

Montrons que $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

$$M_n = \sqrt{\frac{2}{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1+2n}}\, e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1+2n}}\, e^{n\left(-\frac{1}{1+2n} + o\left(\frac{1}{1+2n}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1+2n}}\, e^{-\frac{n}{1+2n} + o\left(\frac{n}{1+2n}\right)}$$

et $-\frac{n}{1+2n} + o\left(\frac{n}{1+2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{1+2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$

par continuité de exp, $e^{-\frac{n}{1+2n} + o\left(\frac{n}{1+2n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{1}{2}}$

Donc $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\sup_{x\in[0,1]} |\sqrt{x} - f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc (f_n) CVU vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$

Toni