COLLE Nº 11

Suites & séries de fonctions

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\cos^n(x) \cdot \sin(nx)$.

1. Montrer que $f_n'(x) = \cos^{n-1}(x) \cdot \cos[(n+1)x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$.
3. Soit, pour tout $x \in [0, \pi]$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
   (a) Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et que
   $$\forall x \in]0, \pi[, \quad S'(x) = -1.$$
   (b) Calculer $S(x)$ pour chaque $x \in [0, \pi]$.
   (c) La convergence de la série $\sum f_n$ est-elle uniforme sur $[0, \pi]$?

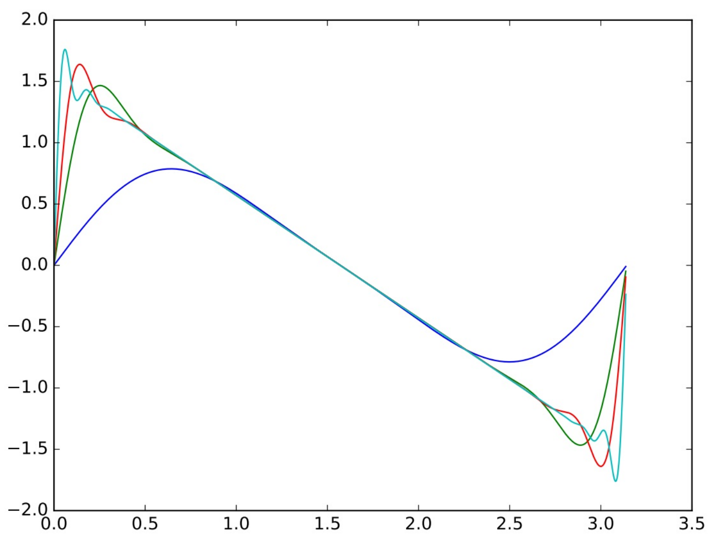

FIGURE 1 – LES FONCTIONS $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$ POUR $n \in \{2, 10, 20, 50\}$

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas normale sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la convergence est normale sur $[a, +\infty[$.
4. Soit un entier naturel $p > 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{4}{\mathrm{e}^2}$.
5. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? sur $]0, +\infty[$?

   ▷ **Trois méthodes dans le corrigé**.

Exercice 3. Soit la suite des fonctions $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in [0, 1]$, par :

$$f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\, dt.$$

1. Calculer $f_1(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
2. Montrer par récurrence que, pour tous $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série numérique $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente.

On rappelle que, pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

4. Montrer que pour tous $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq \mathrm{e}^x$.
5. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$.

Soit, pour chaque $x \in [0, 1]$, $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

6. Montrer que, pour tous $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
7. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
8. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t - t^2)\, dt$.