Colle 11 Séries de fonctions

LEMOINE Maxence

Exercice 1. Soient $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$ et $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Donner des équivalents de f et de g en 0^+.

Solution **1.**

1. *La fonction f est impaire et g est paire. En 0, le terme général n'est pas défini. Pour $x > 0$, $\frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \sim_{n\to+\infty} \exp(-nx)$ terme général d'une série "géométrique" convergente. Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Idem pour g.*
2. *Pour tous $x > 0$ et $n \geq 2$, on a*

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{\operatorname{sh}(xt)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{\operatorname{sh}(xt)}$$

En sommant

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(xt)} dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(xt)} dt$$

On a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{sh(xt)} = \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}(t)} \sim_0 \frac{-\ln(x)}{x}$ car une primitive de $\displaystyle\frac{1}{\operatorname{sh}(t)}$ est $\ln|\operatorname{th}(x/2)|$ qui est équivalent en 0 à $\ln x$.

Pour le terme de gauche $\displaystyle\frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = o\left(-\frac{\ln x}{x}\right)$, et on montre de même que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{sh(xt)} = \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}(t)} \sim_0 \frac{-\ln(x)}{x}.$$

Par encadrement, $f \sim_0 -\dfrac{\ln x}{x}$.

Pour $x > 0$, on a $x^2 g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$. Or pour $x > 0$, $\operatorname{sh} x \geq x$, donc $\left|\dfrac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$. La série est donc normalement convergente et $\dfrac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}$. On en déduit que $\lim_{x\to 0} x^2 g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Finalement, $g(x) \sim_0 \dfrac{\pi^2}{6x^2}$.

Exercice 2. Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}.$$

1. Vérifier que f est définie sur I.
2. Montrer que f est continue sur I.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur I.
4. Expliquer succintement pourquoi f est C^∞ sur I.
5. Montrer que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Solution **2.**

1. Posons $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. On a, si $x > 1$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{1}{x}\right)^n,$$

et la série géométrique de terme géntal x^{-n} converge, donc, d'après le critère de comparaison, la série de terme général $f_n(x)$ également. Il en résulte que f est définie sur I.

2. Soit $a > 1$. Si $x \geq a$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

La série $f(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. On en déduit que f est continue sur $[a,+\infty[$. Comme ceci est vrai quel que soit $a > 1$, il en résulte que f est continue sur $]1,+\infty[$.

3. *Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, et*

$$f_n'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}.$$

On a donc

$$|f_n'(x)| = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 \frac{n}{x^{n+1}}.$$

Soit $a > 1$. Si $x \geq a$, on a

$$\frac{x^n}{1+x^n} \leq 1 \text{ et } \frac{n}{x^{n+1}} \leq \frac{n}{a^{n+1}},$$

donc

$$|f_n'(x)| \leq \frac{n}{a^{n+1}} = a_n,$$

Mais

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{a},$$

et cette suite tend vers $1/a < 1$. Il résulte du critère de d'Alembert que la série de terme général a_n converge, donc que la série de terme général $f_n'(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Il résulte de b) et c) que f est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ Comme ceci est vrai quel que soit $a > 1$, il en résulte que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

4. *On peut montrer par récurrence que*

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{P_{n,k}(x)}{(1+x^n)^{k+1}},$$

où

$$P_{n,k}(x) = \sum_{j=1}^{k} Q_{j,k}(n)x^{jn-k},$$

où les $Q_{j,k}(n)$ sont des polynômes en n.
Alors

$$\begin{aligned}\left|f_n^{(k)}(x)\right| &\leq \sum_{j=1}^{k} |Q_{j,k}(n)| \frac{x^{jn-k}}{(1+x^n)^{k+1}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} |Q_{j,k}(n)| \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^{k+1} \frac{1}{x^{n(k+1-j)+k}}.\end{aligned}$$

Alors, si $x \geq a$, on obtient

$$\left|f_n^{(k)}(x)\right| \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{|Q_{j,k}(n)|}{a^{n(k+1-j)+k}}.$$

Le membre de droite est alors une somme finie de termes, qui sont chacun le terme général d'une série convergente d'après le critère de d'Alembert. On conclut comme dans c).

5. *Si $x > 1$, on a $1 + x^n \leq 2x^n$, et*

$$f_n(x) \geq \frac{1}{2x^n},$$

donc

$$f(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2x^n} = \frac{1}{2(1-1/x)} = \frac{x}{2(x-1)}.$$

Quand x tend vers 1^+, le membre de droite tend vers $+\infty$, donc celui de gauche également.

CAMBRAY Romain

Exercice 3. Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ et $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Déterminer le domaine, D de définition de g et prouver que g est de classe C^∞ sur D.
2. Montrer que la quantité : $xg(x) - g(x+1)$ est constante sur D.
3. Donner un équivalent de $g(x)$ en $+\infty$ et en 0^+.
4. Tracer la courbe représentative de g sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que, pour tout $x > 0$, e.g(x) $= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Solution **3.**

1. *Les fonctions* u_n *sont définies sur* $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. *De plus, pour* x *fixé, la suite* $|u_n(x)|$ *est décroissante dès que* $n + x > 0$ *et tend vers* 0. *Le critère spécial des séries alternées, nous dit que la fonction* g *est alors bien défnie.*
   Les fonctions u_n *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$. *Soit* a *fixé,* $n > \lfloor(-a)\rfloor + 2$, *donc* $n + a \geq 1$. *Alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et* $x \geq a$,
   $$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k}}{n!} \times \frac{k!}{(x+n)^{n+k}} \Rightarrow |u_n(x) \leq \frac{k!}{n!}.$$
   On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n \geq \lfloor(-a)\rfloor+2} u^{(k)}$ *est normalement convergente sur* $[a, +\infty[$ *et on ajoute les premiers termes (en nombre fini) qui sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$.
2. *On a pour* $n \geq 1$
   $$xu_n(x) - u_{n-1}(x+1) = (-1)^n \frac{x+n}{n!(x+n)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$
   Donc $\displaystyle 1 + \sum_{n \geq 1} xu_n(x) - u_{n-1}(x+1) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$.
3. *Comme* $|xu_n(x)| \leq \dfrac{1}{n!}$, *la série* $\displaystyle\sum_n xu_n(x)$ *est normalement convergente sur* D. *Le théorème de la double limite montre que* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xg(x) = e^{-1}$ *et donc* $g \sim_{+\infty} \dfrac{1}{ex}$.
   On remarque que $g(1) = 1 - e^{-1}$ *et* g *continue en* 1. *L'égalité* $xg(x) - g(x+1) = e^{-1}$ *montre alors que* $xg \sim_0 1$.
4. *On calcule*
   $$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}}{x+k}$$
   d'où
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}}{x+k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} \right)$$
   $$\underset{Cauchy}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} = e \times g(x).$$