

D.S. N° 4 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient quatre exercices indépendants.

Dans chaque exercice, on peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

15

Exercice 1 (Centrale PSI 2024 Math 2).

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ est convergente.

+ 1) Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

+ 3) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

2) Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On notera γ sa limite.

1,1) 5) Soit, pour tout $t > 0$, $f(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$. Montrer que la fonction f est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$.

1) 6) Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t > 0$, $S_n(t) = e^{-t} \sum_{k=0}^n \left(e^{-kt} - \frac{e^{-kt} - e^{-(k+1)t}}{t} \right)$. Montrer que la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$: vers quelle fonction ?

2) 7) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+1} \right)$.

1,1) 8) En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \gamma$.

16

Exercice 2 (CCINP PSI 2024 Math).

- 2) 1) La fonction $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est appelée **la fonction Gamma d'Euler**.

Montrer que le réel $\Gamma(x)$ est défini si, et seulement si, $x > 0$.

- 3) 2) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

- 4) 3) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est une intégrale convergente. On admet que sa valeur est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

- 5) 4) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{et} \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n! 4^n} \sqrt{\pi}. \quad \text{○,5}$$

- 6) 5) Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0, n[\\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$: vers quelle fonction f ?

- 7) 6) Soit $x > 0$. Montrer que l'intégrale $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ converge pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et que

$$I_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Gamma(x). \quad \begin{matrix} \text{Domination} \\ \text{Théo. sur dominic} \end{matrix} \quad \text{1}$$

- 8) 7) Soit $x > 0$. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$ converge et que

$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1). \quad \text{○,5}$$

En déduire une expression de $J_n(x)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$.

- 9) 8) Soit $x > 0$. Montrer que $I_n(x) = n^x J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire **l'identité d'Euler** :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}. \quad \text{○,5}$$

- 10) 9) Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $x > 0$. Montrer que :

$$\Gamma(x+n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (n-1)! n^x.$$

- 11) 10) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n!) - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n)$. Montrer que :

$$u_{n+1} - u_n = \underset{n \rightarrow \infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- 12) 11) En déduire qu'il existe un réel K tel que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n e^K \sqrt{n}$.

- 13) 12) Déduire des questions précédentes la valeur du réel e^K (ce qui prouvera **la formule de Stirling**).

15

Exercice 3 (CCP 2008 MP Math 2).

Toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier tel que $n \geq 2$.

- On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** si son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec une occurrence égale à leur multiplicité, c'est-à-dire :

$$A \text{ est à diagonale propre} \iff \chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$$

- On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour « A est une matrice à diagonale propre ».
- On notera \mathcal{E}_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.
- On notera également \mathcal{S}_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et \mathcal{A}_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

1. 2

- Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $C = aA + bI_n$ et $C' = a^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre. (On pourra distinguer le cas $a = 0$.)

1

- On note G_n l'ensemble des matrices à diagonale propre inversibles. Démontrer que :

$$\forall A \in \mathcal{E}_n, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \geq p_0, \quad A - \frac{1}{p}I_n \in G_n$$

où $A - \frac{1}{p}I_n$ est une MDP
où $A - \frac{1}{p}I_n$ inv. $\Leftrightarrow \frac{1}{p} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
où $\text{Card}(Sp(A)) \leq n$

2

3) Matrices trigonalisables

2

- Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?
 - Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.
- Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. \mathcal{E}_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

On pourra utiliser **sans démonstration** le résultat suivant appelé **théorème spectral** :

Tout élément de \mathcal{S}_n est diagonalisable. Plus précisément, si $A \in \mathcal{S}_n$, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'inverse tP telle que tPAP soit diagonale.

2. 2

5) Matrices symétriques à diagonale propre

- Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Démontrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

- Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

5

6) Matrices antisymétriques à diagonale propre

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

- Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $({}^tAA)^n$.
- Justifier que la matrice tAA est diagonalisable puis que ${}^tAA = 0$.
- Conclure que A est la matrice nulle.

10

Exercice 4 (XENS 2012 MP Math A).

On se donne un espace vectoriel E sur \mathbb{C} de dimension finie, et des endomorphismes non nuls e, f, g de E tels que

$$\begin{aligned} e \circ f - f \circ e &= -2g \\ f \circ g - g \circ f &= -2e \\ g \circ e - e \circ g &= -2f \end{aligned}$$

On note $w = f - ig$ et $z = f + ig$.

- 1) Calculer $e \circ z - z \circ e$, $e \circ w - w \circ e$ et $z \circ w - w \circ z$.
2) Soit v un vecteur propre de e , associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que

$$e(z^k(v)) = \mu_k z^k(v).$$

- 3) Montrer qu'il existe un vecteur propre v_0 de e , associé à une valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, et tel que $z(v_0) = 0$.
4) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = w^k(v_0)$. Calculer $e(v_k)$ en fonction de k , λ_0 et v_k .
Calculer $z(v_k)$ en fonction de k , λ_0 et v_{k-1} .
5) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que v_{n+1} soit nul et v_0, \dots, v_n soient linéairement indépendants.