Feuille de T.D. n° 09

Séries entières

Exercice 1. Il y a une boule blanche dans une urne. On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce. Quand la pièce tombe sur face, on ajoute une boule noire dans l'urne. Quand elle tombe sur pile, on tire une boule au hasard de l'urne et le jeu est fini.

1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « la pièce tombe sur *Pile* la première fois au $n-$ième lancer ». Montrer que ces événements forment un système quasi complet d'événements.
2. Quelle est la probabilité de tirer un jour une boule blanche ?

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. $a_n = \sin n$
2. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$
3. $a_n = \sqrt{n}$
4. $a_n = \tan\left(\dfrac{n\pi}{7}\right)$
5. $a_n = n!$
6. $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n^n}$

Exercice 3. Soient les deux séries entières

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

1. Calculer le rayon de convergence de ces deux séries et, quand elles convergent, calculer leur somme.
2. Calculer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$$

et montrer que, pour tout $x \in]-R, +R[$, sa somme vaut

$$S(x) = \frac{1-x}{2}\ln(1-x) - \frac{1+x}{2}\ln(1+x) + x.$$

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4. Soient une suite de réels a_n et la suite des sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. On suppose que : $a_n > 0$, S_n diverge et $\dfrac{a_n}{S_n}$ tend vers 0.

Montrer que les rayons de convergence des deux séries entières $\sum S_n x^n$ et $\sum a_n x^n$ sont égaux à 1.

Exercice 5. Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0.$$

Montrer qu'elles sont définies sur $]-\infty, +\infty[$ et, en utilisant des fonctions usuelles, les exprimer en fonction de x pour tout x positif et pour tout x négatif.

Exercice 6. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

1. Mq le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1.
2. **▷ théorème 14 du chapitre VII.**

   Soit, pour tout $x \in]-1,+1[$, $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer que

   $$f(x) = \frac{\ln(2)}{1+x} - \frac{\ln(1-x)}{1+x}.$$

Exercice 7. Développer en série entière $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ et en déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{2p}{p} \binom{2(n-p)}{n-p} = 4^n.$$

Exercice 8 (produit de Cauchy & équation différentielle)**.**

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,+1[$.
2. Former une équation différentielle vérifiée par la fonction f sur $]-1,+1[$.
3. En déduire les coefficients du développement en série entière de f.

Exercice 9 (séries entières & complexes)**.** Soit un réel α. Montrer que la rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n \sin(n\alpha)}{n!}$ est infini et calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \sin(n\alpha)}{n!}.$$

Exercice 10 (extrait de Centrale-Supelec 2024 PC Math 2)**.**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

   $$|(1+t) - \mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|,|b|\}$.
   Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \dfrac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$.
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers e^z.

Exercice 11. Soient (a_n) une suite de complexes et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$.
2. Montrer que, pour tout réel β, la série entière $\sum n^\beta a_n z^n$ a pour rayon de convergence R.

Exercice 12. Soient $R_a > 0$ et $R_b > 0$ les rayons de convergence de deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. La série entière $\sum (a_n b_n) x^n$ est appelée le **produit de Hadamard** de ces deux séries entières. Soit R son rayon de convergence.

1. Soit r un réel tel que $0 < r < R_a \cdot R_b$. Justifier qu'il existe $r_a > 0$ et $r_b > 0$ tels que

   $$r_a < R_a \quad , \quad r_b < R_b \quad \text{et} \quad r_a \cdot r_b = r.$$

2. Montrer que $R \geq R_a \cdot R_b$.
3. Calculer le produit de Hadamard des séries entières $\sum x^n$ et $\sum a_n x^n$.
   Et des séries entières $\sum x^{2n}$ et $\sum x^{2n+1}$. Qu'en déduire ?

Et aussi : les exercices 2,14,15,18,19,20,21,22,23,24,47,51 de la banque CCINP & l'exercice 2 du DS n° 5 MPI* 2024-2025.