Corrigé de la colle n° 11

Suites & séries de fonctions

15 décembre 2025

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{n}\cos^n(x) \cdot \sin(nx)$.

1. Montrer que $\quad f_n'(x) = \cos^{n-1}(x) \cdot \cos\left[(n+1)x\right] \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$.
3. Soit, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
   (a) Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et que
   $$\forall x \in]0, \pi[, \quad S'(x) = -1.$$
   (b) Calculer $S(x)$ pour chaque $x \in [0, \pi]$.
   (c) La convergence de la série $\sum f_n$ est-elle uniforme sur $[0, \pi]$?

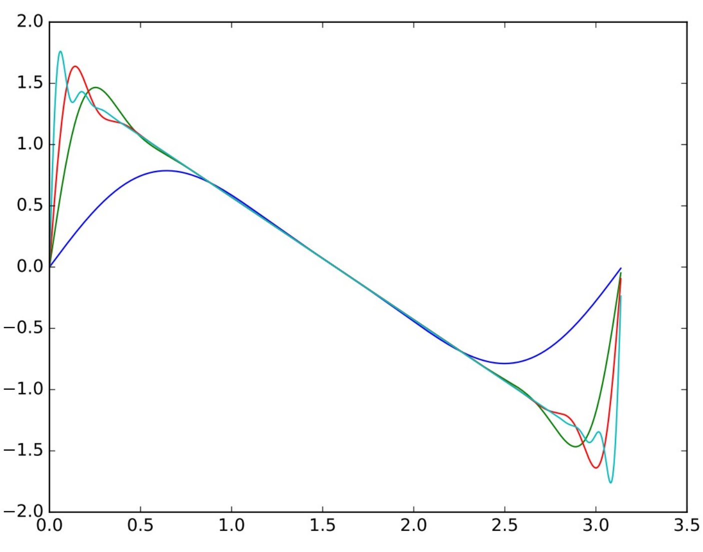

Figure 1 – Les fonctions $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$ pour $n \in \{2, 10, 20, 50\}$

---

1. Avec un peu de trigo...
2. On veut montrer que, pour chaque $x \in [0, \pi]$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge :
   — si $x = 0$ ou $x = \pi$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = 0$, d'où la série $\sum f_n(x)$ converge ;

— si $x \in]0,\pi[$, alors $|f_n(x)| \leq |\cos x|^{n-1}$. Or la série géométrique $\sum |\cos x|^{n-1}$ converge car $|\cos x| < 1$. D'où la série $\sum |f_n(x)|$ converge, donc la série $\sum f_n(x)$ converge (absolument).

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,\pi]$.

3. (a) On applique le théorème de dérivation terme à terme sur un segment $[a,b] \subset]0,\pi[$:
   - — chaque fonction f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ car elle y est dérivable et sa dérivée, calculée en 1, est continue ;
   - — la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$ d'après 2 ;
   - — la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$ car $(*)$;

   d'où la fonction S est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \cdots = -1$

   $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [a,b]$, $|f_n'(x)| \leq |\cos x|^{n-1} \leq q^{n-1}$, où $q = \displaystyle\max_{x\in[a,b]} |\cos x|$. Ce *max* existe car la fonction $x \mapsto |cos(x)|$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle y est donc bornée et atteint ses bornes. De plus $|q| < 1$, d'où la série $\sum q^n$ converge, d'où la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,b]$.

   (b) Si $x = 0$ ou $x = \pi$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = 0$, d'où $S(x) = 0$.

   Pour tout $x \in]0,\pi[$, $S'(x) = -1$, d'où $S(x) = -x + \text{cte}$. Or, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\pi/2) = 0$, d'où cte $= \pi/2$. Donc $S(x) = \frac{\pi}{2} - x$ pour tout $x \in]0,\pi[$.

   (c) Chaque fonction f_n est continue sur $[0,\pi]$ mais la fonction S ne l'est pas, donc la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur $[0,\pi]$.

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas normale sur $[0,+\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la convergence est normale sur $[a,+\infty[$.
4. Soit un entier naturel $p > 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{4}{\mathrm{e}^2}$.
5. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$? sur $]0,+\infty[$?

   ▷ **Trois méthodes dans le corrigé**.

---

1. Soit $x > 0$: $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $n^2 f_n(x) = n^3x^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \dfrac{1}{x^4} y_n^6 \mathrm{e}^{-y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, avec $y_n = x\sqrt{n}$.

   Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où la série $\sum f_n(x)$ converge. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. Et si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$, d'où la série $\sum f_n(0)$ converge. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

2. Chaque fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f_n'(x) = nx(2 - x\sqrt{n})\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. D'où $\displaystyle\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$.
   D'où la série $\displaystyle\sum \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$..

3. (La même méthode a été utilisée à la ▷ **q.3 de l'exo 2 du TD nº 5**.) À partir d'un certain rang n, $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq a$, d'où (tableau des variations) : $\forall x > a$, $\displaystyle\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$ Or la série $\sum f_n(a)$ converge d'après la question 1, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geq f_p\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$.

5. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$:
   - — Première méthode ▷ **théorème 9 du chapitre VII**. $S(0) = 0$ mais $S\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)$ ne tend pas vers 0 quand $p \to \infty$ car $S\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geq \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$. D'où la fonction S n'est pas continue en 0, donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$. (Par l'absurde : si la convergence était uniforme sur $[0,+\infty[$, alors la fonction S serait continue sur $[0,+\infty[$ car chaque fonction f_n l'est.) Cette méthode ne permet pas de conclure sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

— Deuxième méthode ▷ **théorème 12 du chapitre VII**. Pour chaque n, $f_n(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 mais $S(x)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$. (Par l'absurde : si la convergence était uniforme sur $]0,+\infty[$, alors $\lim_{x\to 0} S(x)$ serait égal $\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} f_k(x)$ d'après le théorème de la double limite.) *A fortiori*, il n'y a pas non plus convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.

— Troisième méthode ▷ **méthode 3 du chapitre VII**. La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$ car la suite des fonctions f_n ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle car $f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2}$ ne tend pas vers 0. *A fortiori*, il n'y a pas non plus convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3. Soit la suite des fonctions $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in [0,1]$, par :

$$f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t-t^2)\,dt.$$

1. Calculer $f_1(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
2. Montrer par récurrence que, pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série numérique $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente.

On rappelle que, pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

4. Montrer que pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq e^x$.
5. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.

Soit, pour chaque $x \in [0,1]$, $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

6. Montrer que, pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
7. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t-t^2)\,dt$.

---

1. Soit $x \in [0,1]$: $f_1(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x 1\,dt = 1 + x$.
2. Montrons par récurrence que la propriété

$$P_n \ : \ \forall x \in [0,1],\ 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

est vraie pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

P_0 est vraie car : $\forall x \in [0,1],\ f_1(x) - f_0(x) = x \leq x$.

Supposons P_n. Alors $\forall x \in [0,1],\ f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \left[f_{n+1}(t-t^2) - f_n(t-t^2)\right] dt$.

Si $t \in [0,1]$, alors $t - t^2 = t(1-t) \in [0,1]$. D'où $0 \leq f_{n+1}(t-t^2) - f_n(t-t^2) \leq \dfrac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}$ d'après P_n. D'où $0 \leq f_{n+1}(t-t^2) - f_n(t-t^2) \leq \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ car $t-t^2 = t(1-t)$ et $0 \leq (1-t)^{n+1} \leq 1$. D'où, en intégrant de 0 à 1, $0 \leq f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) \leq \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}$ par croissance de l'intégrale.

Donc P_{n+1} est vraie et, par récurrence, la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $x \neq 0$. La suite numérique $u_n = \frac{|x|^n}{n!}$ est strictement positive et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$, d'où la série $\sum u_n$ converge d'après le critère de D'Alembert.

   Donc la série numérique $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \neq 0$ et aussi pour $x = 0$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$: $f_n(x) = f_0(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} [f_{k+1}(x) - f_k(x)] \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

5. Soit $x \in [0,1]$ fixé. La suite numérique définie par $v_n = f_n(x)$ est croissante car $v_{n+1} - v_n \geq 0$ (d'après la question 2) et majorée par e^x (d'après la question 4). D'où la suite numérique (v_n) converge.

   Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$.

6. Soit $x \in [0,1]$. Pour tout $N \geq n$,

$$0 \leq f_N(x) - f_n(x) = \sum_{k=n}^{N-1} [f_{k+1}(x) - f_k(x)] \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{x^k}{k!}.$$

   Cette inégalité large passe à la limite lorsque $N \to \infty$, donc $\boxed{0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.}$

7. D'après la question 6, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. D'où $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ est un majorant, donc $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car c'est le reste d'une série convergente d'après la question 3. D'où $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

   Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

8. Soit $x \in [0,1]$: $f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f_n(t - t^2)\,dt$. Quand $n \longrightarrow \infty$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ car la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$. Et $\displaystyle\int_0^x f_n(t - t^2)\,dt \longrightarrow \int_0^x f(t - t^2)\,dt$. On a interverti $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ et $\int_0^x$ car la suite de fonctions $g_n : t \mapsto f_n(t - t^2)$ converge uniformément sur $[0,1]$: en effet, pour tout $t \in [0,1]$, $t - t^2 \in [0,1]$ donc $|f_n(t - t^2) - f(t - t^2)| \leq \displaystyle\sup_{[0,1]}(|f_n - f|)$ qui est indépendant de t et tend vers 0 quand n tend vers ∞ d'après la question 7.

   Donc $\boxed{f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t - t^2)\,dt.}$