

K D O D U 1 6 / 1 2 / 2 0 2 5

Séries entières & équations différentielles
(d'après CCP TSI 2013, épreuve Maths 1)

Soit (E) l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) - x(2x^2 - 1)y'(x) - (2x^2 + 1)y(x) = 0.$$

1. Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle (E) .
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle une solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle (E) ?
3. Résoudre, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation différentielle (E) . (De deux manières : en faisant varier la constante & en utilisant une série entière.)

1. Soient R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et $\forall x \in]-R, +R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: alors $\forall x \in]-R, +R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ car on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence.

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x(2x^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - (2x^2 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
 &\iff -a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)a_n + n a_n - a_n] x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0 \\
 &\iff -a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)(n+1)a_n - 2(n-1)a_{n-2}] x^n = 0 \\
 &\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, (n+1)a_n = 2a_{n-2} \end{cases} \quad \text{par unicité du DSE} \\
 &\iff \begin{cases} \forall p \geq 0, a_{2p} = 0 \\ \forall p \geq 1, (p+1)a_{2p+1} = a_{2p-1} \end{cases} \\
 &\iff \forall p \geq 0, a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{a_1}{(p+1)!}.
 \end{aligned}$$

Soit $x \neq 0$: $u_p = \left| \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!} \right| > 0$ et $\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{1}{(p+2)(p+3)} x^2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, donc le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$ d'après le critère de D'Alembert.

2. Soient un réel α et la fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$. Cette fonction g est deux fois dérivable et $\forall x > 0$, $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $g''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Pour tout $x > 0$, $x^2 g''(x) - x(2x^2 - 1)g'(x) - (2x^2 + 1)g(x) = x^2 \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - x(2x^2 - 1)\alpha x^{\alpha-1} - (2x^2 + 1)x^\alpha = (\alpha^2 - 1)x^\alpha - 2(\alpha + 1)x^{\alpha+2} = (\alpha + 1)x^\alpha [(\alpha - 1) - 2x^2]$. Cette quantité est nulle pour tout $x > 0$ ssi $\alpha = -1$.
3. (a) PREMIÈRE MÉTHODE : on fait varier la constante.

On cherche la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$ sous la forme $y(x) = k(x) \cdot \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff x^2 \left[k''(x) \frac{1}{x} - 2k'(x) \frac{1}{x^2} + k(x) \frac{2}{x^3} \right] - x(2x^2 - 1) \left[k'(x) \frac{1}{x} - k(x) \frac{1}{x^2} \right] - (2x^2 + 1)k(x) \frac{1}{x} = 0 \\
 &\iff x k''(x) = (2x^2 + 1)k'(x) \\
 &\iff \ell'(x) = \left(2x + \frac{1}{x} \right) \ell(x) \quad \text{en notant } \ell(x) = k'(x) \\
 &\iff \ell(x) = L \cdot x e^{x^2} \quad \text{où } L \text{ est une constante} \\
 &\iff k(x) = L \cdot e^{x^2} + K \quad \text{où } K \text{ est une constante.}
 \end{aligned}$$

Donc y est une solution $]0, +\infty[$ de (E) si, et seulement si, $\exists(K, L) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]0, +\infty[, y(x) = \frac{L \cdot e^{x^2} + K}{x}$.

- (b) DEUXIÈME MÉTHODE : on utilise les solutions trouvées aux questions précédentes. Sur l'intervalle $]0, +\infty[, (E)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre. On sait que sa solution générale est de la forme : $x = K\varphi_1 + L\varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont deux solutions linéairement indépendantes.

D'une part, pour tout $x \in]0, +\infty[, f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{p+1}}{(p+1)!} = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$.

D'autre part, la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est aussi une solution sur $]0, +\infty[$.

Ces deux solutions sont linéairement indépendantes, donc

y est une solution $]0, +\infty[$ de (E) si, et seulement si, $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]0, +\infty[, y(x) = A \cdot \frac{1}{x} + B \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x}$.