

CORRIGÉ DU D.S. N° 5 DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $f(x)$ est défini si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ converge.

Si $x \leq 0$, alors $e^{-x\sqrt{n}} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où la suite $e^{-x\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.

Si $x > 0$, alors $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = \sqrt{n}^4 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ par croissances comparées, donc :

$$e^{-x\sqrt{n}} = o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\frac{1}{n^2}$ ne change pas de signe et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ converge.

En conclusion, l'ensemble de définition de la fonction f est $D =]0, +\infty[$.

- 2) Soit $a > 0$. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément car normalement sur $]0, a]$. En effet, pour

tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \leq a$, $|f_n(x)| = e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$ et la série $\sum_{n \geq 0} e^{-a\sqrt{n}}$ converge d'après la première

question car $a \in D$. De plus, chaque fonction f_n est continue sur $]0, a]$, d'où la fonction f est continue sur $]0, a]$. Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc la fonction f est continue sur D .

- 3) Comme prouvé à la question précédente, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[42, +\infty[$.

De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1.$$

- 4) Soient $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. L'intégrale est impropre en $+\infty$. Après le changement de variable $u = \sqrt{t}$, qui est strictement monotone et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, avec $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, l'intégrale devient impropre en 0 et en $+\infty$, sa nature ne change pas et, sous réserve de converger,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} 2\sqrt{t} e^{-x\sqrt{t}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} 2ue^{-xu} du.$$

Puis on intègre par parties : les fonctions $u \mapsto \frac{e^{-xu}}{-x}$ et $u \mapsto u$ sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{ue^{-xu}}{-x} = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{ue^{-xu}}{-x} = 0$, d'où la nature de l'intégrale ne change pas et

$$\int_0^{+\infty} ue^{-xu} du = \left[\frac{ue^{-xu}}{-x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{-x} du = \frac{1}{x} \left[\frac{e^{-xu}}{-x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}.$$

Donc l'intégrale converge et vaut $\frac{2}{x^2}$.

5) Soit $x > 0$. L'intégrande $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est une fonction continue et décroissante, d'où

$$\int_0^{N+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq \sum_{n=0}^N e^{-x\sqrt{n}} \leq 1 + \int_0^N e^{-x\sqrt{t}} dt$$

en comparant série et intégrale. Les inégalités larges passent à la limite $N \rightarrow \infty$ (car série et intégrales convergent d'après les questions précédentes), d'où

$$\forall x > 0, \quad \frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2},$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{2}{x^2}} = 1$ d'après le théorème des gendarmes, donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

PROBLÈME

Partie 1

- 1) Si $a = b = 0$, alors la fonction est nulle et appartient donc à E .

Réciproquement, supposons que $f \in E$. Au voisinage de $+\infty$, $f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} = (ae^t + b)^2 \frac{e^{-t}}{t} \sim a^2 \frac{e^t}{t}$ si $a \neq 0$. Comme $a^2 \frac{e^t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$, la fonction n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ si $a \neq 0$. La convergence de l'intégrale implique donc $a = 0$.

Si $a = 0$, alors $f(t) = b$ pour tout t . La fonction $t \mapsto b^2 \frac{e^{-t}}{t}$ est dans E si, et seulement si, $b = 0$. En effet : si $b \neq 0$, alors $b^2 \frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{b^2}{t}$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

Donc $f \in E$ si et seulement si $a = b = 0$.

- 2) D'une part, la fonction P est continue car polynomiale. D'autre part, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge si, et seulement si, les deux intégrales $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$ convergent :
- au voisinage de $+\infty$, $P^2(t) \frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe, donc l'intégrale sur $[1, +\infty[$ converge ;
 - au voisinage de 0, $P^2(t) \frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{P^2(t)}{t}$:
 - si $P(0) \neq 0$, alors on a l'équivalence avec $\frac{P^2(0)}{t}$ qui ne change pas de signe, or $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge, donc l'intégrale sur $]0, 1]$ diverge ;
 - si $P(0) = 0$, alors $P^2(t) \frac{e^{-t}}{t}$ tend vers 0 car il existe $(a, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$ tel que $P(t) \sim at^k$, d'où $P^2(t) \frac{e^{-t}}{t} \sim a^2 t^{2k-1} \rightarrow 0$, donc l'intégrale sur $]0, 1]$ est faussement impropre.

La fonction est donc dans E si, et seulement si, $P(0) = 0$.

- 3) On utilise l'inégalité $2|ab| \leq a^2 + b^2 : |f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t}| = |f(t) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}| |g(t) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}}| \leq \frac{1}{2} \left(f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} + g^2(t) \frac{e^{-t}}{t} \right)$. Comme $f \in E$ et $g \in E$, les fonctions $t \mapsto f^2(t) \frac{e^{-t}}{t}$ et $t \mapsto g^2(t) \frac{e^{-t}}{t}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$ est donc absolument convergente.
- 4) L'ensemble E contient la fonction nulle. Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda f(t) + g(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} = \lambda^2 f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} + g^2(t) \frac{e^{-t}}{t} + 2\lambda f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t}$. Les trois termes du membre de droite sont intégrables (d'après la définition de E et la question 3). Donc $(\lambda f + g) \in E$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

- 5) L'intégrale $\langle f|g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$ est convergente d'après la question 3.
- la symétrie $\langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle$ est vérifiée ;
 - la linéarité à gauche ($\langle \alpha f + g|h \rangle = \alpha \langle f|h \rangle + \langle g|h \rangle$ pour tous $f, g, h \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$) implique la bilinéarité par symétrie ;
 - la positivité ($\langle f|f \rangle = \int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \geq 0$ pour tout $f \in E$) est vérifiée ;
 - la fonction $t \mapsto f^2(t) \frac{e^{-t}}{t}$ est positive et continue sur $]0, +\infty[$, d'où $\langle f|f \rangle = 0$ implique $f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} = 0$ et donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, d'après le théorème de l'intégrale nulle.

Donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Partie 2

- 6) La fonction k_x est continue et :
- pour tout $t \in]0, x]$, $k_x^2(t) \frac{e^{-t}}{t} = (e^t - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} \sim t \cdot e^{-t} \rightarrow 0$, donc l'intégrale sur $]0, x]$ est faussement impropre ;
 - pour tout $t \in [x, +\infty[$, $k_x^2(t) \frac{e^{-t}}{t} = (e^x - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe, donc l'intégrale sur $[x, +\infty[$ converge.

Donc $k_x \in E$.

7) $\|k_x\|^2 = \int_0^{+\infty} k_x^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$ et :

- pour tout $t \in]0, x]$, $k_x(t) = e^t - 1$, or la fonction $t \mapsto \frac{(e^t-1)^2}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et ce prolongement atteint son maximum M sur le segment $[0, x]$, d'où $0 \leq \int_0^x k_x^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_0^x M e^{-t} dt \leq M \int_0^x dt = Mx$;
- pour tout $t \in [x, +\infty[$, $k_x(t) = e^x - 1$, d'où $0 \leq \int_x^{+\infty} k_x^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt = (e^x - 1)^2 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{(e^x-1)^2}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{(e^x-1)^2}{x} e^{-x}$.

Donc $0 \leq \|k_x\|^2 \leq Mx + \frac{(e^x-1)^2}{x} e^{-x}$. Quand $x \rightarrow 0$, $Mx \rightarrow 0$ et $\frac{(e^x-1)^2}{x} e^{-x} \sim \frac{x^2}{x} \cdot 1 = x \rightarrow 0$. Donc $\|k_x\|$ tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

- 8) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $0 \leq |U(f)(x)| = |\langle k_x | f \rangle| \leq \|k_x\| \cdot \|f\|$. D'après la question 7, $\lim_{x \rightarrow 0} U(f)(x) = 0$
- 9) Soit $x > 0$: $U(f)(x) = \int_0^x (e^t - 1) f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt + (e^x - 1) \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$. La fonction $U(f)$ est dérivable car, en réécrivant $U(f)(x) = \left(\int_{42}^x (e^t - 1) f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt + \text{cte} \right) + (e^x - 1) \left(\text{cte} - \int_{42}^x f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$, on fait apparaître des primitives de fonctions continues. En dérivant :

$$\begin{aligned} U(f)'(x) &= \frac{1 - e^{-x}}{x} f(x) + e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt - (e^x - 1) f(x) \frac{e^{-x}}{x} \\ &= \frac{f(x)}{x} (1 - e^{-x} - (e^x - 1)e^{-x}) + e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt = 0 + e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt, \\ \text{donc } U(f)'(x) &= e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

- 10) On applique l'inégalité triangulaire à l'intégrale de la question précédente :

$$|U(f)'(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt| \leq e^x \int_x^{+\infty} |f(t)| \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} dt.$$

Puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|U(f)'(x)| \leq e^x \left(\int_x^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2}.$$

Comme $\int_x^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt = \|f\|^2$:

$$|U(f)'(x)| \leq e^x \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2}.$$

Pour tout $t \geq x > 0$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$, d'où :

$$\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt \right)^{1/2} = \left(\frac{e^{-x}}{x} \right)^{1/2} = \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Donc } |U(f)'(x)| \leq e^x \|f\| \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}} = \|f\| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}.$$

- 11) La fonction Φ est bien définie car $\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui ne change pas de signe.

Elle est dérivable et $\Phi'(x) = \frac{d}{dx} (4\sqrt{x}e^{x/2}(1+x)^{-1}) - \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} = \frac{4(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x/2} + \sqrt{x}\frac{1}{2}e^{x/2})(1+x) - 4\sqrt{x}e^{x/2}}{(1+x)^2} - \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$.
D'où $\Phi'(x) = \frac{(1-x)^2 e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}(x+1)^2} \geq 0$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$ car $\frac{4\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$ tend vers 0 et $0 \leq \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt \leq \int_0^x \frac{e^{x/2}}{\sqrt{t}} dt \leq e^{x/2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq e^{x/2} 2\sqrt{x}$ tend aussi vers 0.

La fonction Φ est croissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$, donc $\Phi(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$.

- 12)** Soient x et y strictement positifs : $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt$ car f est $\mathcal{C}^1$. De plus, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$ par hypothèse, d'où $f(x) = f(x) - \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^x f'(t)dt = \int_0^x f'(t)dt$. D'où $|f(x)| = |\int_0^x f'(t)dt| \leq \int_0^x |f'(t)|dt \leq C \int_0^x \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} dt$. De la question précédente, on tire que $\int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{4\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$.

Donc $|f(x)| \leq \frac{4C\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}}{x+1}$.

On en tire que : $0 \leq f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} \leq \left(\frac{4C\sqrt{t}e^{t/2}}{1+t} \right)^2 \frac{e^{-t}}{t} = 16C^2 \frac{te^t}{(1+t)^2} \frac{e^{-t}}{t} = \frac{16C^2}{(1+t)^2}$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge. Par ailleurs, la fonction f est continue, donc $f \in E$.

- 13)** L'application U est linéaire. Reste à prouver que $U(f) \in E$.

La fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 9. Pour tout $x > 0$, $|U(f)'(x)| \leq \|f\| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$ d'après la question 10. Et $\lim_{x \rightarrow 0} U(f)(x) = 0$ d'après la question 8. En posant $C = \|f\|$ dans la condition suffisante d'appartenance à E de la question précédente, on conclut que $U(f) \in E$ et $|U(f)(x)| \leq 4\|f\| \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$ pour tout $x > 0$.

- 14)** En utilisant la majoration de la question précédente :

$$\begin{aligned} \|U(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty} (U(f)(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_0^{+\infty} \left(4\|f\| \frac{\sqrt{t}e^{t/2}}{1+t} \right)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt, \text{ d'où} \\ \|U(f)\|^2 &\leq 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{t e^t}{(1+t)^2} \frac{e^{-t}}{t} dt = 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt \leq 16\|f\|^2. \end{aligned}$$

Donc $\|U(f)\| \leq 4\|f\|$.

- 15)** Par l'absurde. La fonction $g : x \mapsto x^{1/4}$ appartient à E . Si U est surjectif, alors il existe $f \in E$ tel que $g = U(f)$. En utilisant la majoration de la question 13 :

$$x^{1/4} = g(x) = U(f)(x) \leq 4\|f\| \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$$

pour tout $x \in]0, +\infty[$. D'où $x^{-1/4} \frac{1+x}{e^{x/2}} \leq 4\|f\|$, ce qui est absurde car le membre de gauche tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0$. Donc l'endomorphisme U n'est pas surjectif.

Partie 3

- 16)** D'après la question 9, la fonction $U(f)'$ est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et $U(f)$ est par suite de classe $\mathcal{C}^2$. En dérivant :

$$U(f)''(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt + e^x \left(-\frac{f(x)}{x} e^{-x} \right)$$

$$U(f)''(x) = U(f)'(x) - \frac{f(x)}{x}$$

Donc $U(f)$ est une solution de l'équation différentielle $y''(x) - y'(x) = -\frac{f(x)}{x}$.

- 17) Soit $f \in \text{Ker}(U)$. Alors $U(f) = 0$ et, par suite, $U(f)' = 0$ et $U(f)'' = 0$. En remplaçant dans l'équation différentielle de la question précédente : $0 - 0 = -\frac{f(x)}{x}$, ce qui implique $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. D'où $\text{Ker}(U) = \{0\}$, donc l'endomorphisme U est injectif. On en déduit que le spectre de U ne contient pas 0.
- 18) Analyse : soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ un polynôme (où la suite des réels a_n est nulle à partir d'un certain rang). La fonction P est une solution de (E_p) si, et seulement si, $a_0 = 0$ et $n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si le polynôme P n'est pas nul, alors soit r son degré : $0 = r(r+1)a_{r+1} = (r-p)a_r$ en utilisant la relation de récurrence. Le degré du polynôme P est donc p .

Synthèse : le polynôme P de degré p défini par $a_0 = 0$ et $n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n$ pour tout $n \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ est bien une solution de l'équation (E_p) . Ce polynôme P appartient à E d'après la question 2 car $P(0) = a_0 = 0$.

- 19) D'une part, la fonction P est une solution de (E_p) : $x(P''(x) - P'(x)) + p P(x) = 0$. D'autre part, la fonction $U(P)$ vérifie, d'après la question 16, l'équation $U(P)''(x) - U(P)'(x) = -\frac{P(x)}{x}$. La fonction $T = p U(P) - P$ vérifie donc l'équation

$$T'' - T' = p(U(P)'' - U(P)') - (P'' - P').$$

On multiplie par x :

$$x(T'' - T') = p \underbrace{x(U(P)'' - U(P)')}_{=-P} - \underbrace{x(P'' - P')}_{=-pP} = 0.$$

De $x(T''(x) - T'(x)) = 0$ pour tout $x > 0$, on déduit que $T''(x) - T'(x) = 0$ pour tout $x > 0$.

- 20) De l'équation différentielle $T'' - T' = 0$, on tire que : $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x > 0, T'(x) = a e^x$. Donc $\exists b \in \mathbb{R}, \forall x > 0, T(x) = a e^x + b$. D'où $p U(P)(x) - P(x) = T(x) = a e^x + b$ pour tout $x > 0$. Or $P \in E$ d'après la question 18, d'où $U(P) \in E$ car U est un endomorphisme. Comme E est un sous-espace vectoriel, $T = p U(P) - P \in E$. Or, d'après la question 1, la fonction $x \mapsto a e^x + b$ est dans E si, et seulement si, $a = b = 0$. D'où $T = 0$. Donc $U(P) = \frac{1}{p}P$ et $P \neq 0$. Autrement dit, P est un vecteur propre de U associé à la valeur propre $\frac{1}{p}$.

EXERCICE 2

- 1) Supposons que $K = uv^T$ et que les vecteurs u et v ne sont pas nuls. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Kx = uv^T x = \langle v, x \rangle u$, d'où $\text{Im}(K) \subset \text{Vect}(u)$. Ou bien le *sev* $\text{Im}(K)$ est $\{0\}$, ou bien c'est $\text{Vect}(u)$. Or $Kv = uv^T v = \langle v, v \rangle u \neq 0$ car $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Donc $\text{Im}(K) = \text{Vect}(u)$ et $\text{rg}(K) = \dim \text{Im}(K) = 1$.

Réciproquement, soit K une matrice de rang 1. Il existe alors un vecteur $u \neq 0$ tel que chaque colonne K_j de K est un multiple de u . Pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $v_j \in \mathbb{R}$ de sorte que $K_j = v_j u$. En notant $v = (v_1 \ \dots \ v_n)^T$, il vient que $v \neq 0$ (car $M \neq 0$ car M est de rang 1) et que $K = uv^T$.

Enfin, $x \in \text{Ker}(K) \iff uv^T x = 0 \iff v^T x = 0$ car $u \neq 0$. Donc $\text{Ker}(K) = [\text{Vect}(v)]^\perp$.

- 2) Supposons que $uv^T = xy^T$. Comme $\text{Im}(uv^T) = \text{Vect}(u)$ et $\text{Im}(xy^T) = \text{Vect}(x)$ d'après la question 1, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda x$. En raisonnant de même avec les matrices transposées, il existe $\mu \neq 0$ tel que $y = \mu v$. Alors $uv^T = \frac{\mu}{\lambda} uv^T$, d'où $\mu = \lambda$ et finalement $u = \lambda x$ et $y = \lambda v$. La réciproque est claire.
- 3) (a) $\text{Tr}(K) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \langle u, v \rangle$ car $K_{ij} = (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.
 (b) $K^2 = uv^T uv^T = u \langle v, u \rangle v^T = \langle u, v \rangle uv^T = \text{Tr}(K) K$.
 (c) Si $\text{Tr}(K) \neq 0$, alors le polynôme scindé à racines simples $X(X - \text{Tr}(K))$ annule la matrice K , qui est donc diagonalisable. Réciproquement, si $\text{Tr}(K) = 0$, alors $K^2 = 0$, d'où X^2 est un polynôme annulateur de la matrice K , d'où le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de X^2 . Par l'absurde : si K est diagonalisable, alors K est semblable à la matrice nulle, d'où $K = 0$, ce qui contredit le rang égal à 1.
- 4) Supposons que $P = yy^T$ et que $\|y\| = 1$. Alors P est de rang 1 d'après la question 1 car $y \neq 0$. $P^2 = yy^T yy^T = \|y\|^2 P = P$, donc P est projecteur. De plus, noyau et image de P sont des *sev* orthogonaux car $\text{Im}(P) = \text{Vect}(y)$ et $\text{Ker}(P) = [\text{Vect}(y)]^\perp$ d'après la question 1.

Réciproquement, supposons que P est une projection orthogonale de rang 1. On écrit $P = uv^T$ grâce à la question 1. De plus, les image $\text{Im}(P) = \text{Vect}(u)$ et noyau $\text{Ker}(P) = [\text{Vect}(v)]^\perp$ sont des *sev* orthogonaux, d'où $\exists \lambda \neq 0$, $u = \lambda v$. Alors $P = \lambda v v^T$. Comme P est un projecteur de rang 1, $\text{Tr}(P) = 1 = \lambda \|v\|^2$. On en déduit que $\lambda = 1/\|v\|^2$ et on peut ainsi écrire $P = ww^T$ où le vecteur $w = \frac{v}{\|v\|}$ est de norme 1.

- 5) En calculant le produit matriciel par blocs :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ v^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n + uv^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n + uv^T & u \\ (1 + \langle u, v \rangle) v^T & 1 + \langle u, v \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n + uv^T - uv^T & u \\ (1 + \langle u, v \rangle) v^T - (1 + \langle u, v \rangle) v^T & 1 + \langle u, v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & u \\ 0 & 1 + \langle u, v \rangle \end{pmatrix}$$

puis il vient que $1 \times \det(\mathbb{I}_n + uv^T) \times 1 = 1 + \langle u, v \rangle$. Donc $\det(\mathbb{I}_n + uv^T) = 1 + \langle v, u \rangle$ en égalisant les déterminants, qui sont bien triangulaires par blocs. La matrice A étant inversible, on en déduit que $\det(A + uv^T) = \det(A(\mathbb{I}_n + A^{-1}uv^T))$. Donc $\det(A + uv^T) = \det(A)(1 + \langle v, A^{-1}u \rangle)$.

Enfin, $\det(A) \neq 0$, d'où $A + uv^T \in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $1 + \langle v, A^{-1}u \rangle \neq 0$, ce qui est équivalent à $\langle v, A^{-1}u \rangle \neq -1$.

- 6) Calculons le produit :

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -\frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + \langle v, A^{-1}u \rangle} \end{pmatrix} (A + uv^T) = \mathbb{I}_n + A^{-1}uv^T - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}A + A^{-1}uv^T A^{-1}uv^T}{1 + \langle v, A^{-1}u \rangle} \\ = \mathbb{I}_n + A^{-1}uv^T - \frac{A^{-1}uv^T + A^{-1}u \langle v, A^{-1}u \rangle v^T}{1 + \langle v, A^{-1}u \rangle} = \mathbb{I}_n + A^{-1}uv^T - \frac{(1 + \langle v, A^{-1}u \rangle) A^{-1}uv^T}{1 + \langle v, A^{-1}u \rangle} = \mathbb{I}_n \\ \text{Donc } (A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + \langle v, A^{-1}u \rangle}.$$

- 7) Soit u un vecteur de norme 1. Alors $P = uu^T$ est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u)$ d'après la question 4. D'où $Q = \mathbb{I}_n - P$ est la projection orthogonale sur $[\text{Vect}(u)]^\perp$. La matrice Q n'est donc pas inversible, d'où $\det(Q) = 0$. Mais $\det(Q + uu^T) = \det(Q + P) = \det(\mathbb{I}_n) = 1 \neq 0$.