Chapitre X Variables aléatoires

Table des matières

X.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 1
1. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire discrète** (*vad*) est une fonction X définie sur l'univers Ω telle que :
   (i) l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est fini ou dénombrable ;
   (ii) pour chaque valeur $a \in X(\Omega)$ prise par X, l'ensemble $X^{-1}(\{a\})$ est un événement, noté $(X = a)$. Autrement dit : $\forall a \in X(\Omega),\ (X = a) = X^{-1}(\{a\}) \in \mathscr{A}$.
2. Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une *vad*. La **loi de probabilité** de X est la fonction

$$X(\Omega) \longrightarrow [0,1],\ a \mapsto P(X = a).$$

L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la *vad* X peut ne pas être, ou être inclus dans $\mathbb{R}$: on dira alors que X est une variable aléatoire réelle discrète (*vard*).

Exercice 2 — *On lance deux dés : c'est une expérience aléatoire, quel est son univers Ω ? Soit X la vad définie par la somme des deux dés. Préciser $X(\Omega)$ et, pour chaque $a \in X(\Omega)$, l'événement $(X = a)$. On suppose chaque résultat équiprobable : déterminer la loi de probabilité de X.*

Remarque 3 —
1. Rappelons que (définition) : $a \in f^{-1}(A) \iff f(a) \in A$ et que (propriétés) :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$

2. Si $X(\Omega)$ est un ensemble :
- *fini de cardinal $n+1$, alors on peut écrire $X(\Omega) = \{a_0, \cdots, a_n\} = \{a_i,\ i \in I\}$ où $I = [\![0, n]\!]$;*
- *dénombrable, alors $X(\Omega) = \{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\} = \{a_i,\ i \in I\}$, où $I = \mathbb{N}$.*

Dans les deux cas, la famille $(X = a_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements (c'est une union certaine et disjointe), donc

$$\sum_{i\in I} P(X = a_i) = 1.$$

Exemple 4 — *On lance indéfiniment une pièce qui tombe, de manière équiprobable, sur Pile ou Face : l'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble $\Omega = \{Pile\,;Face\}^{\mathbb{N}^*}$ des suites de Pile et de Face. On* *mesure le temps d'attente T du premier Pile : c'est la variable aléatoire discrète définie par*

$$T(\omega) = \begin{cases} \infty \text{ si } \omega \text{ est une suite de } Face\,; \\ \text{le rang du premier } Pile \text{ dans la suite } \omega \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ est dénombrable et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(T = n)$ contient exactement l'infinité des suites commençant par $n-1$ Face suivi(s) de 1 Pile. L'événément $(T = \infty)$ n'est pas impossible, la famille $(T = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est donc pas un système complet d'événements. Mais c'est un système quasi complet d'événements car l'événement $(T = \infty)$ est presque impossible d'après l'exercice 11 du chapitre VI. On pourra donc utiliser la formule des probabilités totales : pour tout événement A,

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T = n) \cdot P(A|T = n).$$

PROPOSITION 5

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et une *vad* $X : \Omega \to E$ à valeurs dans un ensemble E.

(i) Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $X^{-1}(A) \in \mathscr{A}$ est un événement noté aussi $(X \in A)$.

(ii) L'application $P_X : \mathcal{P}(E) \to [0, 1]$, $A \mapsto P(X \in A)$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$.

Preuve —

(i) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E : l'ensemble $X^{-1}(A) = X^{-1}(A \cap X(\Omega)) = \bigcup_{a\in A\cap X(\Omega)} X^{-1}(\{a\})$ est une union finie ou dénombrable d'événements d'après la définition 1. C'est donc un événement d'après la définition d'une tribu.

(ii) D'après la définition 6 du chapitre VI, P_X est une probabilité sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$ car :
- — $P_X(E) = P(X^{-1}(E)) = 1$ car $X^{-1}(E) = \Omega$ est l'événement certain ;
- — si $\underset{i\in I}{\cup} A_i$ est une union disjointe et dénombrable de parties de E, alors $X^{-1}\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = \underset{i\in I}{\cup} X^{-1}(A_i)$ est une union disjointe et dénombrable, d'où $P_X\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = P\left(\underset{i\in I}{\cup} X^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i\in I} P(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i\in I} P_X(A_i)$.

□

En particulier, si la *vad* est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$(X = n) = (X \in \{n\}) = X^{-1}(\{n\})$ et on note $(X \leq n)$ l'événement $(X \in [\![0, n]\!]) = X^{-1}([\![0, n]\!])$.

EXERCICE 6 — *Une boîte contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n fois une boule au hasard en la remettant à chaque fois dans la boîte. Soit X la vad égale au maximum des numéros tirés. Déterminer la loi de probabilité de X.*

X.2 La loi binomiale

DÉFINITION 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X **suit une loi binomiale** de paramètres (n, p) et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

On vérifie que $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$.

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p \in]0, 1[$ est une expérience aléatoire qui peut donner deux résultats : un « succès » S avec une probabilité p ou un « échec » E avec la probabilité $q = 1 - p$.

PROPOSITION 8
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Soit X la *vad* égale au nombre de succès parmi n épreuves de Bernoulli de paramètre p. Si ces épreuves sont indépendantes, alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Preuve — Un résultat est une $n-$liste formée de S (succès) et de E (échec). L'événement $(X = k)$ contient les $n-$listes avec k fois S et $n-k$ fois E : le nombre de $n-$listes est donc $\binom{n}{k}$ et la probabilité de chaque $n-$liste est $p^k \cdot q^{n-k}$ car les épreuves sont indépendantes. Donc $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. □

EXEMPLE 9 — *1. Si $n = 1$, alors $X \sim \mathcal{B}(1,p)$:*

$$X(\Omega) = [\![0,1]\!] \quad , \quad P(X=0) = \binom{1}{0} \cdot p^0 \cdot q^1 = q \qquad \textit{et} \qquad P(X=1) = \binom{1}{1} \cdot p^1 \cdot q^0 = p.$$

2. On lance n fois une pièce (c'est une expérience aléatoire). Si la pièce est équilibrée, alors la variable aléatoire discrète X égale au nombre de Pile obtenus suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

*3. On tire au hasard **avec remise** n boules dans une boîte contenant une proportion p de boules blanches (c'est une expérience aléatoire). La variable aléatoire discrète X égale au nombre de boules blanches tirées suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.*

EXERCICE 10 — *Montrer que, si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors la variable aléatoire $n - X$, qui mesure le nombre d'échecs, suit aussi une loi binomiale : $n - X \sim \mathcal{B}(n,q)$.*

X.3 LA LOI GÉOMÉTRIQUE

DÉFINITION 11
Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. On dit qu'une variable aléatoire discrète T **suit une loi géométrique** de paramètre p et on note $T \sim \mathcal{G}(p)$ si

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in T(\Omega), \quad P(T=k) = p \cdot q^{k-1}.$$

On vérifie que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = 1$.

Expérience aléatoire : on répète indéfiniment une épreuve de Bernoulli. On dit que le **temps d'attente** du premier succès est $k \in \mathbb{N}^*$ si le premier succès arrive au $k-$ième essai. Par exemple $T(EES\cdots) = 3$.

Ce temps d'attente est une variable aléatoire discrète T et $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (pas tout à fait : voir l'exemple 4). La proposition suivante montre que, si les épreuves de Bernoulli sont indépendantes, alors la loi du temps d'attente est une loi géométrique.

PROPOSITION 12
Soit $p \in]0,1[$. Soit T la *vad* égale au temps d'attente du premier succès lors d'une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre p. Si ces épreuves sont indépendantes, alors $T \sim \mathcal{G}(p)$.

Preuve — L'événement $(T = k)$ est l'intersection $E_1 \cap \cdots E_{k-1} \cap \overline{E_k}$, où E_k est l'événement « La $k-$ième épreuve de Bernoulli réalise un échec », de probabilité q. Or les épreuves de Bernoulli sont indépendantes, donc $P(T=k) = pq^{k-1}$. □

EXERCICE 13 — *Soit X une* va *qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $P(X > n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.*

X.4 La loi de Poisson

Définition 14
Soit un réel $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X **suit une loi de Poisson** de paramètre λ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On vérifie que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$.

La loi de Poisson a été introduite en 1838 par Siméon Denis Poisson (1781–1840). Elle permet d'approximer une loi binomiale grâce à la proposition suivante.

Proposition 15
Soient un réel $\lambda > 0$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, avec $p_n \in]0, 1[$. Si $\quad n \cdot p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \quad$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

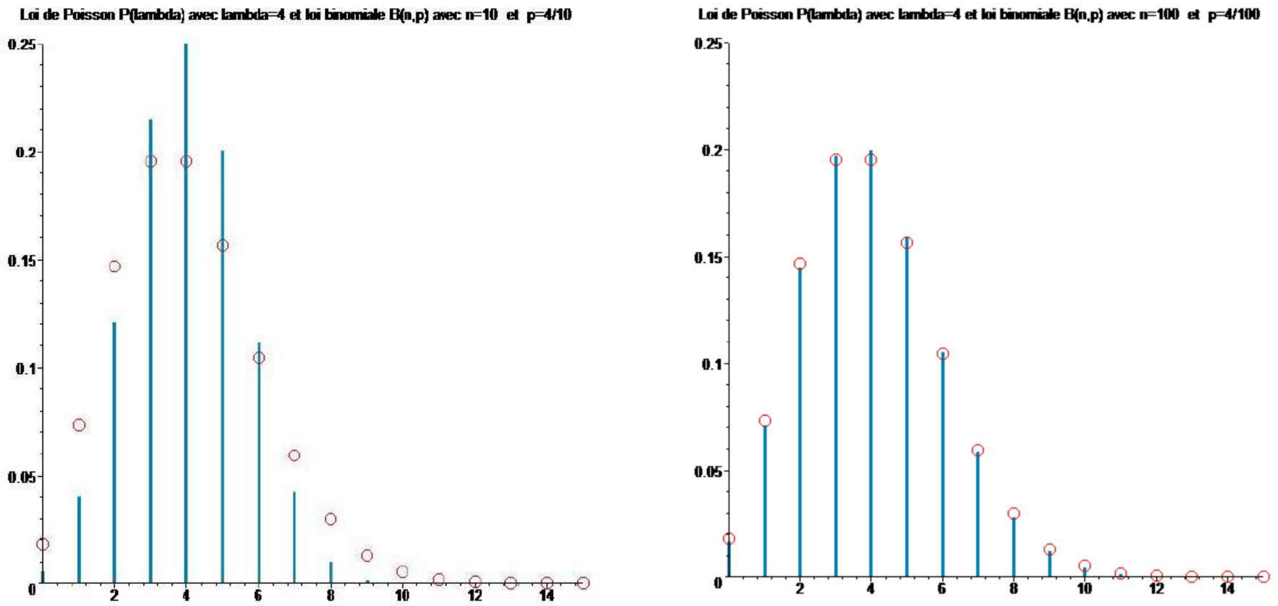

Figure X.1 – Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Preuve —

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n^k}{k!} \underbrace{\left[1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{1 - \frac{k-1}{n})}{n}\right]}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} p_n^k (1-p_n)^{n-k}. \end{aligned}$$

Or $(np_n)^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda^k$ et la forme indéterminée $(1-p_n)^{n-k}$ s'écrit $\mathrm{e}^{(n-k)\ln(1-p_n)}$.

Or $n-k \underset{n\to\infty}{\sim} n$ et $\ln(1-p_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -p_n$ car $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $(n-k)\ln(1-p_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\lambda$. Donc $P(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}$. □

REMARQUE 16 — *L'expérience montre que la loi de Poisson est suivie par de nombreuses variables aléatoires telles que :*

- *le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une durée T ;*
- *le nombre de connexions à un serveur web pendant une durée T ;*
- *le nombre de clients qui passent à la caisse d'un magasin pendant une durée T ;*
- *le nombre d'atomes qui se désintègrent dans un échantillon radioactif pendant une durée T.*

On peut comprendre pourquoi grâce au modèle suivant : on découpe un intervalle de temps de durée T en un nombre n d'intervalles de durée $\Delta t = \frac{T}{n}$ et on suppose que la probabilité p_n de réalisation d'un événement pendant la durée Δt est proportionnelle à la durée Δt : $p_n = \lambda\Delta t = \lambda\frac{T}{n}$, où le paramètre $\lambda > 0$ est donc la probabilité de réalisation d'un événement par unité de temps.

On fait l'hypothèse que les événements sont des **événements rares** *: si n est assez grand, alors l'événement se réalise au plus une fois pendant la petite durée $\Delta t = \frac{T}{n}$. Autrement dit : cet événement, qui se réalise (succès) ou pas (échec), est une épreuve de Bernoulli.*

Si (deuxième hypothèse) les événements sont indépendants (par exemple : pas de réaction en chaîne dans l'échantillon radioactif), alors l'expérience aléatoire est équivalente à la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes. La probabilité de succès pendant une épreuve est p_n et la loi de probabilité est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$.

X.5 ESPÉRANCE

DÉFINITION 17
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle discrète (*vard*) telle que $X(\Omega) = \{a_i,\ i\in I\} \subset \mathbb{R}$. Si la série $\sum a_i P(X = a_i)$ converge absolument, alors :

(i) on dit que X est **d'espérance finie** ou que X possède une espérance ou que $X \in L^1$;

(ii) cette espérance, notée $E(X)$, est le nombre réel $E(X) = \displaystyle\sum_{i\in I} a_i P(X = a_i)$.

Si la *vard* X mesure le gain d'un joueur, alors l'espérance est la somme que ce joueur peut « espérer » gagner.

REMARQUE 18 —

1. *Dans la définition de l'espérance, on veut que la valeur de l'espérance ne dépende pas de l'ordre dans lequel on indexe les valeurs a_i afin de les sommer. C'est le cas si la série converge absolument.*

2. *Une* vard *peut ne pas être d'espérance finie :*

   $$\text{si } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{6}{\pi^2 n^2},\ \text{alors } \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \text{ et la série } \sum np_n \text{ diverge.}$$

3. *Si $X(\Omega)$ est fini, alors la variable aléatoire X est nécessairement d'espérance finie car $E(X)$ est alors une somme finie.*

4. *Si la* vard *X est bornée, alors elle est nécessairement d'espérance finie.*

   Preuve *— Soit M un majorant de la suite des $|a_n|$. Pour tout $n\in I$, $|a_n P(X=a_n)| \leq MP(X=a_n)$.*

   Or la série $\sum MP(X=a_n) = M\sum P(X=a_n)$ converge (vers M).

   Donc la série $\sum a_n P(X=a_n)$ converge absolument. □

5. *L'espérance est linéaire : si une* vard X *est d'espérance finie, alors* $\alpha X + \beta$ *aussi et*

$$\boxed{E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta}$$

pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$.

Preuve — *Notons* a_n *la suite des valeurs prises par la vad* X. *Par hypothèse, la série* $\sum |a_n P(X = a_n)|$ *converge. Or* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |\alpha a_n + \beta| \leq |\alpha| \cdot |a_n| + |\beta|$ *et les séries* $\sum |\alpha| \cdot |a_n| P(X = a_n) = |\alpha| \sum |a_n| P(X = a_n)$ *et* $\sum |\beta| P(X = a_n) = |\beta| \sum P(X = a_n)$ *convergent, d'où la série* $\sum (\alpha a_n + \beta) P(X = a_n)$ *converge absolument. De plus* $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta) P(X = a_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(X = a_n) + \beta \sum_{n=0}^{\infty} P(X = a_n) = \alpha E(X) + \beta$. □

6. *Si* X *est d'espérance finie, alors* $|X|$ *aussi et* $|E(X)| \leq E(|X|)$ *par l'inégalité triangulaire.*
7. *L'espérance est croissante : soient* X *et* Y *deux va d'espérances finies.*
   Si $X \leq Y$ *(*i.e. *si* $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq Y(\omega)$*), alors* $E(X) \leq E(Y)$.

Exercice 19 — *Montrer que :*

1. *si* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, *alors* X *est d'espérance finie et* $E(X) = n \cdot p$.
   On pourra utiliser la petite formule *:* $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq k, \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. *si* $T \sim \mathcal{G}(p)$, *alors* T *est d'espérance finie et* $E(T) = \dfrac{1}{p}$.
3. *si* $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, *alors* X *est d'espérance finie et* $E(X) = \lambda$.

Proposition 20

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une *vad* telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$:

X est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum P(X \geq n)$ converge. Et alors

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

Preuve —

— Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} P(X > k)$. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = T_{n-1} - nP(X > n). \qquad (*)$$

C'est vrai pour $n = 1$ car $S_1 = P(X = 1) = P(X > 0) - P(X > 1) = T_0 - P(X > 1)$.

Supposons la propriété $(*)$ vraie pour n. Alors elle est vraie pour $n + 1$ car

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + (n+1)P(X = n+1) &= T_{n-1} - nP(X > n) + (n+1)P(X = n+1) \\ &= T_n - (n+1)P(X > n) + (n+1)P(X = n+1) \\ &= T_n - (n+1)P(X > n+1). \end{aligned}$$

Donc la propriété $(*)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Les suites (S_n) et (T_n) sont croissantes. D'après $(*)$, $S_n \leq T_{n-1}$, d'où :

(T_n) converge $\implies$ (S_n) converge $\implies$ X est d'espérance finie.

— Réciproquement : si X est d'espérance finie, alors (S_n) converge, d'où $\sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X = k) = E(X) - S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'après $(*)$, $T_{n-1} = S_n + nP(X > n)$. Or $nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X = k) \leq E(X) - S_n$. D'où

$nP(X > n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc (T_{n-1}) converge et $\lim_{n\to\infty} T_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n$. Donc $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$.

□

Exercice 21 — *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles positives et d'espérance finie. Montrer que la va $\lfloor X \rfloor$ est d'espérance finie et que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \leq E(X) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(X \geq n).$$

Remarque 22 — *Si X est une* vard *et φ est une fonction de $X(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$, alors :*

1. *$\varphi \circ X$ est aussi une* vard*, notée $\varphi(X)$;*
2. *soit $\varphi \circ X(\Omega) = \{b_j,\ j \in J\}$. Si $\varphi(X)$ possède une espérance $E(\varphi(X))$, alors cette espérance est égale à $\sum_{j \in J} b_j P(\varphi(X) = b_j)$ (c'est la définition de l'espérance) mais aussi à $\sum_{i \in I} \varphi(a_i) P(X = a_i)$ (c'est le théorème suivant, que nous admettons).*

Théorème 23 (**théorème de transfert**)
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, X une *vard* et φ une fonction de $X(\Omega) = \{a_i,\ i \in I\}$ vers $\mathbb{R}$:

$\varphi(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum \varphi(a_i) P(X = a_i)$ converge absolument. Et alors $E(\varphi(X))$ est égale à la somme $\sum_{i \in I} \varphi(a_i) P(X = a_i)$ de cette série.

X.6 Variance et écart-type

Définition 24
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une *vard* : $X(\Omega) = \{a_i,\ i \in I\}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si la série $\sum a_i^k P(X = a_i)$ converge absolument, alors on dit que X possède un **moment d'ordre** k et que ce moment d'ordre k est le nombre réel

$$\sum_{i \in I} a_i^k P(X = a_i).$$

Autrement dit (en utilisant le théorème de transfert) : X possède un moment d'ordre k si, et seulement si, X^k est d'espérance finie. Et alors ce moment d'ordre k est $E(X^k)$.

Lemme 25
Si une *vard* possède un moment d'ordre $k+1$, alors elle possède aussi un moment d'ordre k.

Preuve — Pour tout réel $x \geq 0$, $x^k \leq x^{k+1} + 1$ (distinguer deux cas : $x \geq 1$ et $x < 1$).

D'où $|a_i^k P(X = a_i)| \leq |a_i^{k+1} P(X = a_i)| + P(X = a_i)$ pour tout $i \in I$. La série $\sum P(X = a_i)$ converge (vers 1).

Donc : si la série $\sum |a_i^{k+1} P(X = a_i)|$ converge, alors la série $\sum |a_i^k P(X = a_i)|$ converge aussi. □

Proposition-Définition 26
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une *vard*. Si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi et on appelle **variance** de X le réel positif

$$V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

L'**écart-type** $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Preuve — D'après le lemme, X est d'espérance finie. Soit $\mu = E(X)$. Pour tout $i \in I$, $[a_i - \mu]^2 = a_i^2 - 2\mu a_i + \mu^2$. Or les séries $\sum a_i^2 P(X = a_i)$, $\sum(-2\mu a_i)P(X = a_i) = -2\mu \sum a_i P(X = a_i)$ et $\sum \mu^2 P(X = a_i) = \mu^2 \sum P(X = a_i)$ convergent, donc la variance est bien définie.

En outre :
$$V(X) = \sum_{i \in I} (a_i - \mu)^2 \, P(X = a_i) = \sum_{i \in I} a_i^2 P(X = a_i) - 2\mu \sum_{i \in I} a_i P(X = a_i) + \mu^2 \sum_{i \in I} P(X = a_i) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2.$$

□

Remarque 27 —

1. *La variance mesure la dispersion ou l'étalement des valeurs a_i autour de l'espérance $E(X)$. En particulier, si $\exists a \in \mathbb{R},\ P(X = a) = 1$, alors $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.*
2. *Si la variable X a une unité (km/s, V/m, etc), alors l'écart-type a la même unité (d'où l'intérêt de calculer la racine carrée de la variance).*
3. *Soient deux réels α et β. Si X^2 est d'espérance finie, alors $\alpha X + \beta$ aussi et*

$$\boxed{V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X).}$$

Exercice 28 — *Montrer que :*

1. *si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors X^2 est d'espérance finie et $V(X) = n \cdot p \cdot q$.*
2. *si $T \sim \mathcal{G}(p)$, alors T^2 est d'espérance finie et $V(T) = \dfrac{q}{p^2}$.*
3. *si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors X^2 est d'espérance finie et $V(X) = \lambda$.*

X.7 Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Ces inégalités sont des *inégalités de concentration*. Elle mesurent la probabilité qu'une variable aléatoire X soit concentrée autour d'une valeur : 0 dans le cas de l'inégalité de Markov, $E(X)$ dans le cas de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Lemme 29 (**Markov**)
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une *vard*. Si X est positive et d'espérance finie, alors :

$$\forall a > 0, \qquad P\left(X \geq a\right) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Preuve — Soient $(a_n)_{n \in I}$ les valeurs prises par la variable aléatoire X : l'espérance vaut $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n P(X = a_n)$. Soit $J = \{n \in I \mid a_n \geq a\}$: $\mu \geq \sum_{n \in J} a_n P(X = a_n)$ car $J \subset I$ et les a_n sont positifs. D'où

$$\mu \geq \sum_{n \in J} a P(X = a_n) = a \sum_{n \in J} P(X = a_n) = a P(X \geq a).$$

□

Proposition 30 (**Bienaymé-Tchebychev**)
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une *vard*. Si X^2 est d'espérance finie, alors

$$\forall a > 0, \qquad P\left(|X - E(X)| \geq a\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Preuve — X^2 est d'espérance finie, d'où la variance $V(X) = \sigma^2$ et l'espérance $E(X) = \mu$ sont définies. La variable aléatoire $Y = (X - m)^2$ est positive et son espérance est $E(Y) = \sigma^2$. D'après l'inégalité de Markov, $P(Y \geq a^2) \leq \dfrac{\sigma^2}{a^2}$. Or les événements $Y \geq a^2$ et $|X - \mu| \geq a$ sont égaux. Donc $P(|X - m| \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{a^2}$. □

X.8 Série génératrice

Définition 31
Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. La **série génératrice** de X est la série entière

$$\sum p_n \cdot t^n \qquad \text{de coefficients} \quad p_n = P(X = n).$$

La série $\sum p_n$ converge car sa somme vaut $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, d'où :

(i) le rayon de convergence R de la série génératrice est supérieur ou égal à 1 ;

(ii) la **fonction génératrice** est définie sur $]-R, +R[$ et peut-être aux bords de cet intervalle par

$$\boxed{G_X \ : t \mapsto G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n = E\left(t^X\right)}$$

(iii) la série génératrice converge normalement sur $[-1, +1]$, d'où la fonction génératrice $G_X \ : t \mapsto G_X(t)$ est définie et même continue sur $[-1, +1]$ au moins ;

(iv) la fonction G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +1[$ au moins et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

La fonction génératrice de X permet donc de retrouver la loi de probabilité de X.

Elle permet aussi de calculer l'espérance et la variance de X. Si $R > 1$, alors $1 \in]-R, +R[$, d'où : $G'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$ et $G''(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n$ car on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. On en déduit que X^2 est d'espérance finie et :

$$E(X) = G_X'(1) \qquad \text{et} \qquad V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left[G_X'(1)\right]^2.$$

La proposition suivante ne dit rien d'autre quand $R > 1$ et en dit plus quand $R = 1$.

Proposition 32
Soient X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.

1. X est d'espérance finie si, et seulement si, la fonction G_X est dérivable en 1. Et alors
$$E(X) = G_X'(1).$$
2. X^2 est d'espérance finie si, et seulement si, la fonction G_X est deux fois dérivable en 1. Et alors
$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left[G_X'(1)\right]^2.$$

Preuve —

1. La fonction G_X est continue sur $[-1, +1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +1[$ et $\forall t \in]-1, +1[$, $G_X'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n t^{n-1}$. Si la variable aléatoire X possède une espérance $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$, alors la série de fonctions $\sum np_n t^{n-1}$ converge normalement sur $[-1, +1]$, donc la fonction $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} np_n t^{n-1}$ est continue sur $[-1, +1]$, d'où $G_X'(t)$ possède une limite quand t tend vers 1. Donc (théorème de la limite de la dérivée) G_X est dérivable en 1 et $G_X'(1) = \lim_{t \to 1} G_X'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = E(X)$. Nous admettons la réciproque.

2. Si la variable aléatoire X possède un moment d'ordre 2, alors elle possède aussi un moment d'ordre 1, d'où la fonction G'_X est continue sur $[-1,+1]$. La série $\sum n^2 p_n$ converge (car la variable aléatoire X possède un moment d'ordre 2), d'où la série de fonctions $\sum n(n-1)p_n t^{n-2}$ converge normalement sur $[-1,+1]$, donc la fonction $t \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n t^{n-2}$ est continue sur $[-1,+1]$. Or $\forall t \in]-1,+1[, G''_X(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n t^{n-2}$, d'où $G''_X(t)$ possède une limite quand t tend vers 1. D'où (théorème de la limite de la dérivée) G'_X est dérivable en 1 et

$$G''_X(1) = \lim_{t\to 1} G''_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - \sum_{n=0}^{\infty} np_n = E(X^2) - E(X) = V(X) + [E(X)]^2 - E(X).$$

Donc $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left[G'_X(1)\right]^2$. Nous admettons la réciproque. □

Exercice 33 — *Soient $p \in]0,1[$, $q = 1-p$ et $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire. Montrer que :*

1. *si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors*
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = (pt+q)^n \ ;$$
2. *si $T \sim \mathcal{G}(p)$, alors*
$$\forall t \in \left]-\frac{1}{q}, +\frac{1}{q}\right[, \quad G_T(t) = \frac{pt}{1-qt} \ ;$$
3. *si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors*
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

En déduire l'espérance et la variance de chacune de ces vard.

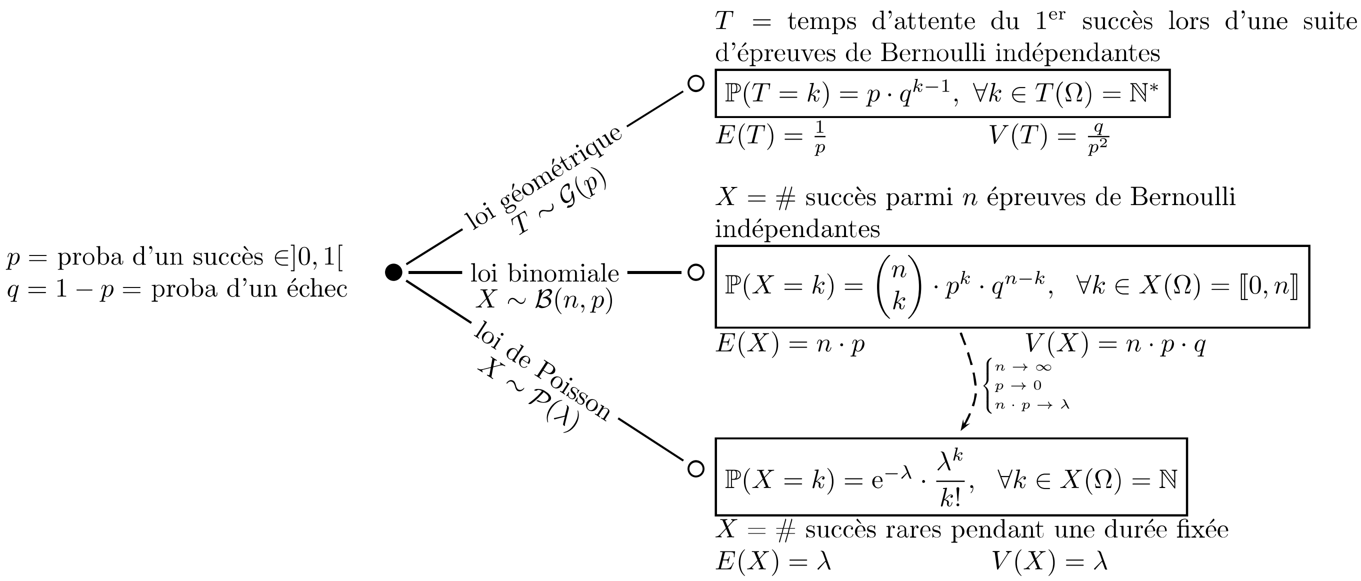

Figure X.2 – Trois lois de probabilité classiques