

PROGRAMME DE LA COLLE N° 12

Semaine du 5/01/2026

Produits scalaires ▷ chapitre VIII & TD n° 8 :

- produits scalaires et norme associée sur un $\mathbb{R}$ -ev E de dimension infinie ou finie, notamment les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}([a, b])$ et $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$;
- égalités de polarisation et du parallélogramme, inégalités de Cauchy-Schwarz (et CNS d'égalité) et triangulaire;
- orthogonalité de deux vecteurs, d'un vecteur et d'une partie, de deux parties; théorème de Pythagore (CNS dans le cas de 2 vecteurs, CN dans le cas de $n > 2$ vecteurs);
- orthogonal d'une partie A , $A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$, $A \subset (A^\perp)^\perp$, $A^\perp$ est un sev, $A \text{ sev} \implies A \cap A^\perp = \{0_E\}$;
- liberté d'une famille de vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux;
- familles et bases orthonormées, algorithme de Gram-Schmidt; dans une b.o.n, expression du produit scalaire de deux vecteurs et de la matrice d'un endomorphisme;
- existence, unicité et formule de la projection orthogonale d'un espace préhilbertien E sur un sev F de dimension finie;
- théorème des moindres carrés, distance $d(x, F)$ d'un vecteur $x \in E$ à un sev F de dimension finie;
- le sev F est de dimension finie $\implies F \oplus F^\perp = E \implies F = (F^\perp)^\perp$;
- l'orthogonal d'une droite est un hyperplan;
- en dimension finie, l'orthogonal d'un hyperplan est une droite, théorème de représentation de Riesz, distance d'un vecteur à un hyperplan ou à une droite.