Programme de la colle n° 13

Semaine du 12/01/2026

Séries entières ▷ chapitre IX & TD n° 9 :

À savoir :

— lemme d'Abel, rayon de convergence d'une série entière, convergence absolue de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, incertitude aux bords, divergence grossière ailleurs ;

— convergence normale de la série entière sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence ;

— théorème d'Abel radial ;

— on peut intégrer ou dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence ;

— la somme f d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$;

— (ne pas) être développable en série entière, unicité du DSE, série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$,

$$f \text{ est } DSE \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ et sa série de Taylor converge ;}$$

— DSE usuels ;

— le produit de Cauchy de deux séries entières, la somme et le produit de deux séries entières est une série entière ;

— les séries entières dans $\mathbb{C}$ (rayon de convergence, série géométrique, exponentielle complexe).

Et à savoir faire :

1. Calculer un rayon de convergence en utilisant les méthodes des séries numériques, la conservation du rayon par intégration ou dérivation terme terme, le lemme d'Abel, *etc.*
2. Calculer la somme d'une série entière en reconnaissant une série classique, en intégrant ou dérivant terme à terme, *etc.*
3. Etudier la convergence et la somme d'une série entière aux bords de l'intervalle de convergence grâce au théorème d'Abel radial ou grâce à la convergence uniforme et au théorème de la double limite.
4. Trouver les solutions, développables en série entière, d'une équation différentielle.
5. Montrer qu'une fonction est ou n'est pas développable en série entière en étudiant le reste de la série de Taylor grâce à la formule de Taylor avec reste intégral.

À venir : Variables aléatoires.