

D.S. N° 5 DE MATHÉMATIQUES

Cet énoncé comporte un exercice et deux problèmes.

L'exercice est tiré de CCINP 2024 MPI MATH 2.

Le problème 1 porte sur les matrices de Gram et de Hilbert.

Le problème 2 est tiré de X-ENS 2025 PC MATH 2.

9 EXERCICE

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$, où $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, et on note f sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

- 1) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $D =]0, +\infty[$. *$\sum f_n(x) < \infty$ si $x > 0$, car $\forall n, x > 0$*
- 2) Démontrer que f est continue sur D . *$\sum f_n$ C.V.N. sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$, donc f C.V. sur $]0, +\infty[$*
- 3) Étudier la limite de f en $+\infty$. *Théor. de la double limite, sur $[1, +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$*
- 4) Soit $x \in D$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$ est convergente et la calculer. *C.V. = 1, Hyp. C.V. = 1, $\lim_{t \rightarrow \infty} 1 = 1$*
- 5) En déduire un équivalent de f au voisinage de 0. *encadrer $0,5$ par une suite géométrique et donner $0,5$
 $\sim \frac{2}{x^2} 0,5$*

15 PROBLÈME 1

Soit E un espace préhilbertien. La MATRICE DE GRAM d'une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de n ($n \in \mathbb{N}^*$) vecteurs de E est la matrice

$$G(v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \langle v_1 | v_2 \rangle & \cdots & \langle v_1 | v_n \rangle \\ \langle v_2 | v_1 \rangle & \langle v_2 | v_2 \rangle & \cdots & \langle v_2 | v_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n | v_1 \rangle & \langle v_n | v_2 \rangle & \cdots & \langle v_n | v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

- 1) Soient u et v deux vecteurs de E . Montrer que le déterminant de la matrice

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} \langle u | u \rangle & \langle u | v \rangle \\ \langle v | u \rangle & \langle v | v \rangle \end{pmatrix}$$

est positif. À quelle condition (nécessaire ? suffisante ?) est-il strictement positif ?

2) Soit une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de n vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de dimension n de E .

1 a) Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F et la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad \text{pour chaque } j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Montrer que $G(v_1, v_2, \dots, v_n) = A^T \cdot A$.

0,5 b) Montrer que $\det G(v_1, v_2, \dots, v_n) \geq 0$.

3 c) Montrer que les matrices A et $G(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ont le même rang.

0,5 d) En déduire que le rang de $G(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est égal à la dimension de $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

3) On suppose que $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E et on note p la projection orthogonale de E sur F .

1 a) Soit z un vecteur de $F^\perp$. Exprimer $\det G(v_1, v_2, \dots, v_n, z)$ en fonction de $\|z\|$ et $\det G(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

3 b) Soient y un vecteur de F et z un vecteur de $F^\perp$. Montrer que

$$\det G(v_1, v_2, \dots, v_n, y + z) = \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

2 c) Soit x un vecteur de E . Montrer que la distance $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ du vecteur x au sous-espace vectoriel F est égale à

$$\sqrt{\frac{\det G(v_1, v_2, \dots, v_n, x)}{\det G(v_1, v_2, \dots, v_n)}}.$$

4) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

2 a) Montrer que la matrice

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}, \quad = G(1, x, \dots, x^{n-1})$$

appelée MATRICE DE HILBERT, est inversible.

1 b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \int_0^1 (t^n - a_0 - a_1 t - \dots - a_{n-1} t^{n-1})^2 dt$$

possède un minimum égal à $\frac{\det H_{n+1}}{\det H_n}$.

18 PROBLÈME 2

On note n un entier strictement positif et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de taille n . Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont notés en gras et sont identifiés à des matrices colonnes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par exemple

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de transposée $\mathbf{x}^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$. De même, on identifie matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Enfin, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ la matrice $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est identifiée au nombre réel $\sum_{i=1}^n x_i y_i$; l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire et de sa norme usuels, notés respectivement

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- 2) Déterminer les sous-espaces propres et valeurs propres de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Est-elle diagonalisable ?

- 3) 1) Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Montrer que K est de rang 1 si, et seulement si, il existe $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $K = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$. Déterminer alors $\text{Im}(K)$ et $\text{Ker}(K)$.

- 2) Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathbf{u} \mathbf{v}^T = \mathbf{x} \mathbf{y}^T$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}, \text{ et } \mathbf{v} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{y}.$$

- 3) Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que $K = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$.

a) Montrer que $\text{Tr}(K) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

b) Montrer que $K^2 = \text{Tr}(K)K$.

c) En déduire que K est diagonalisable si, et seulement si, $\text{Tr}(K) \neq 0$.

- 4) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P est une projection orthogonale de rang 1 si, et seulement si, il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{y}\| = 1$ et $P = \mathbf{y} \mathbf{y}^T$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

- 5) Calculer le produit matriciel par blocs

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n + \mathbf{u} \mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Handwritten notes: $\det(\mathbb{I}_n + \mathbf{u} \mathbf{v}^T) = 1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$; $\det(A + \mathbf{u} \mathbf{v}^T) = \det(A) (1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1} \mathbf{u} \rangle)$

et en déduire que : $A + \mathbf{u} \mathbf{v}^T$ est inversible si, et seulement si, $\langle \mathbf{v}, A^{-1} \mathbf{u} \rangle \neq -1$.

- 6) On suppose que $A + \mathbf{u} \mathbf{v}^T$ est inversible. Montrer que

$$(A + \mathbf{u} \mathbf{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1} \mathbf{u} \rangle}.$$

- 7) Exhiber une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\det(C) = 0 \quad \text{et} \quad \det(C + \mathbf{u} \mathbf{v}^T) \neq 0.$$