Corrigé du D.S. n° 5 de mathématiques

Exercice

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $f(x)$ est défini si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} e^{-x\sqrt{n}}$ converge.

Si $x \leqslant 0$, alors $e^{-x\sqrt{n}} \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où la suite $e^{-x\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.

Si $x > 0$, alors $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = \sqrt{n}^4 e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc :

$$e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\frac{1}{n^2}$ ne change pas de signe et la série de Riemann $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} e^{-x\sqrt{n}}$ converge.

En conclusion, l'ensemble de définition de la fonction f est $D =]0, +\infty[$.

2) Soit $a > 0$. La série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément car normalement sur $]\cancel{0, a}]$ $[a,+\infty[$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \cancel{\leqslant} \geqslant a$, $|f_n(x)| = e^{-x\sqrt{n}} \leqslant e^{-a\sqrt{n}}$ et la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} e^{-a\sqrt{n}}$ converge d'après la première question car $a \in D$. De plus, chaque fonction f_n est continue sur $]\cancel{0, a}]$ $[a,+\infty[$, d'où la fonction f est continue sur $]\cancel{0, a}]$ $[a,+\infty[$. Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc la fonction f est continue sur D.

3) Comme prouvé à la question précédente, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[42, +\infty[$.

De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

4) Soient $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. L'intégrale est impropre en $+\infty$. Après le changement de variable $u = \sqrt{t}$, qui est strictement monotone et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, avec $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, l'intégrale devient impropre en 0 et en $+\infty$, sa nature ne change pas et, sous réserve de converger,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} 2\sqrt{t} e^{-x\sqrt{t}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} 2u e^{-xu} du.$$

Puis on intègre par parties : les fonctions $u \mapsto \frac{e^{-xu}}{-x}$ et $u \mapsto u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{u\to 0} \frac{ue^{-xu}}{-x} = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{ue^{-xu}}{-x} = 0$, d'où la nature de l'intégrale ne change pas et

$$\int_0^{+\infty} u e^{-xu} du = \left[\frac{ue^{-xu}}{-x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{-x} du = \frac{1}{x}\left[\frac{e^{-xu}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x^2}.$$

Donc l'intégrale converge et vaut $\dfrac{2}{x^2}$.

5) Soit $x > 0$. L'intégrande $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est une fonction continue et décroissante, d'où

$$\int_0^{N+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-x\sqrt{n}} \leqslant 1 + \int_0^{N} e^{-x\sqrt{t}}dt$$

en comparant série et intégrale. Les inégalités larges passent à la limite $N \to \infty$ (car série et intégrales convergent d'après les questions précédentes), d'où

$$\forall x > 0, \quad \frac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2},$$

d'où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\frac{2}{x^2}} = 1$ d'après le théorème des gendarmes, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

Problème 1

1) $\det G(u,v) = \begin{vmatrix} < u|u > & < u|v > \\ < v|u > & < v|v > \end{vmatrix} = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - (< u|v >)^2$ est supérieur ou égal à zéro car, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$| < u|v > | \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, les deux vecteurs sont colinéaires. Donc $\det G(u,v) > 0$ si, et seulement si, la famille (u,v) est libre.

2) **a)** Notons $M = G(v_1, v_2, \cdots, v_n)$:

$m_{ij} =< v_i|v_j >=< \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_{pi}e_p | \sum_{q=1}^{n} a_{qj}e_q >= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{pi}a_{qj} < e_p|e_q >= \sum_{p=1}^{n} a_{pi}a_{pj}$ car $< e_p|e_q >= \delta_{pq}$. Donc $M = A^T \cdot A$.

b) $\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \det(A^T A) = \det A^T \cdot \det A = (\det A)^2$ est positif.

c) Soit un vecteur-colonne X :

– si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $AX = 0$, d'où $A^T AX = A^T 0 = 0$, d'où $X \in \mathrm{Ker}(A^T A)$, donc $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^T A)$;

– si $X \in \mathrm{Ker}(A^T \cdot A)$, alors $A^T AX = 0$, d'où $\|AX\|^2 = X^T A^T AX = X^T 0 = 0$, d'où $(AX)^T(AX) = 0$, d'où $AX = 0$, d'où $X \in \mathrm{Ker}(A)$, donc $\mathrm{Ker}(A^T \cdot A) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

De l'égalité des noyaux $\mathrm{Ker}(A^T \cdot A) = \mathrm{Ker}(A)$ et du théorème du rang, on déduit que les matrices A et $G(v_1, v_2, \cdots, v_n) = A^T \cdot A$ ont le même rang.

d) La matrice A est la matrice des coordonnées de la famille de vecteurs $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ dans la base $(e_1, \cdots e_n)$. Son rang est donc égal à la dimension de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.

3) **a)** $G(v_1, v_2, \cdots, v_n, z) = \begin{pmatrix} & & & < v_1|z > \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & < v_n|z > \\ < z|v_1 > & \cdots & < z|v_n > & < z|z > \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \|z\|^2 \end{pmatrix},$

donc $\det G(v_1, \cdots, v_n, z) = \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, \cdots, v_n)$.

b)

$$
\begin{aligned}
&\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, y+z) \\
&= \begin{vmatrix} & & & < v_1|y+z > \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & < v_n|y+z > \\ < y+z|v_1 > & \cdots & < y+z|v_n > & < y+z|y+z > \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} & & & < v_1|y > \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & < v_n|y > \\ < y|v_1 > & \cdots & < y|v_n > & \|y\|^2 + \|z\|^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} & & & < v_1|y > \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & < v_n|y > \\ < y|v_1 > & \cdots & < y|v_n > & \|y\|^2 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & 0 \\ < y|v_1 > & \cdots & < y|v_n > & \|z\|^2 \end{vmatrix} \\
&= \det G(v_1, \cdots, v_n, y) + \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, \cdots, v_n).
\end{aligned}
$$

Or la famille $(v_1, \cdots, v_n, y)$ est liée, d'où $\det G(v_1, \cdots, v_n, y) = 0$, donc

$$\det G(v_1, \cdots, v_n, y+z) = \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, \cdots, v_n).$$

c) $x = y + z$, où $y = p(x) \in F$ et $z = x - p(x) \in F^{\perp}$, d'où $d(x, F) = \|z\| = \sqrt{\|z\|^2}$.

Or $\det G(v_1, \cdots, v_n, x) = \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, \cdots, v_n)$ d'après (3b) et $\det G(v_1, \cdots, v_n) \neq 0$ car la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre. Donc $\|z\| = \sqrt{\dfrac{\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, x)}{\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n)}}$.

4) **a)** $< X^i|X^j >= \displaystyle\int_0^1 t^i \cdot t^j \, dt = \frac{1}{i+j+1}$, d'où $H_n = G(1, X, \cdots, X^{n-1})$. D'où le rang de la matrice H_n est égal à la dimension de $\mathrm{Vect}(1, X, \cdots, X^{n-1})$. Or la famille de polynômes $(1, X, \cdots, X^{n-1})$ est libre. D'où $\mathrm{rg}\, H_n = n$, donc H_n est inversible.

b) $f(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = \displaystyle\int_0^1 \left(t^n - a_0 - a_1 t - \cdots - a_{n-1}t^{n-1}\right)^2 \, dt = \|X^n - (a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1})\|^2$ possède un minimum égal à $\|X^n - p(X^n)\|^2 = [d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])]^2$, où p est la projection orthogonale de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ sur le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donc $d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) = \sqrt{\dfrac{\det G(1, \cdots, X^{n-1}, X^n)}{\det G(1, \cdots, X^{n-1})}} = \sqrt{\dfrac{\det H_{n+1}}{\det H_n}}$.

Problème 2

0) La matrice J est de rang 1 car ses colonnes ne sont pas toutes nulles et sont toutes colinéaires à la colonne $(1\,1\,\cdots\,1)^T$. D'une part, le vecteur $(1\,1\,\cdots\,1)^T$ est un vecteur propre associé à la valeur propre n. D'autre part, $\dim \mathrm{Ker}(J) = n - \mathrm{rg}(J) = n - 1$ d'après le théorème du rang. Or le noyau est aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre 0. En complétant une base du noyau avec le vecteur

$(1\,1\,\cdots\,1)^T$, on obtient une base formée de vecteurs propres de la matrice J, qui est donc diagonalisable. Et semblable à $\mathrm{diag}(0,\cdots,0,n)$, donc $\mathrm{Sp}(J)=\{0;n\}$.

1) Supposons que $K=uv^T$ et que les vecteurs u et v ne sont pas nuls. Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $Kx=uv^Tx=\langle v,x\rangle u$, d'où $\mathrm{Im}(K)\subset\mathrm{Vect}(u)$. Ou bien le *sev* $\mathrm{Im}(K)$ est $\{0\}$, ou bien c'est $\mathrm{Vect}(u)$. Or $Kv=uv^Tv=\langle v,v\rangle u\neq 0$ car $u\neq 0$ et $v\neq 0$. Donc $\mathrm{Im}(K)=\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{rg}(K)=\dim\mathrm{Im}(K)=1$.

Réciproquement, soit K une matrice de rang 1. Il existe alors un vecteur $u\neq 0$ tel que chaque colonne K_j de K est un multiple de u. Pour chaque $j\in[\![1,n]\!]$, posons $v_j\in\mathbb{R}$ de sorte que $K_j=v_ju$. En notant $v=(v_1\quad\cdots\quad v_n)^T$, il vient que $v\neq 0$ (car $M\neq 0$ car M est de rang 1) et que $K=uv^T$.

Enfin, $x\in\mathrm{Ker}(K)\iff uv^Tx=0\iff v^Tx=0$ car $u\neq 0$. Donc $\mathrm{Ker}(K)=[\mathrm{Vect}(v)]^\perp$.

2) Supposons que $uv^T=xy^T$. Comme $\mathrm{Im}(uv^T)=\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Im}(xy^T)=\mathrm{Vect}(x)$ d'après la question 1, il existe $\lambda\neq 0$ tel que $u=\lambda x$. En raisonnant de même avec les matrices transposées, il existe $\mu\neq 0$ tel que $y=\mu v$. Alors $uv^T=\frac{\mu}{\lambda}uv^T$, d'où $\mu=\lambda$ et finalement $u=\lambda x$ et $y=\lambda v$. La réciproque est claire.

3) **(a)** $Tr(K)=\sum_{i=1}^n u_iv_i=\langle u,v\rangle$ car $K_{ij}=(u_iv_j)_{1\leq i,j\leq n}$.

(b) $K^2=uv^Tuv^T=u\langle v,u\rangle v^T=\langle u,v\rangle uv^T=\mathrm{Tr}(K)\,K$.

(c) Si $\mathrm{Tr}(K)\neq 0$, alors le polynôme scindé à racines simples $X(X-\mathrm{Tr}(K))$ annule la matrice K, qui est donc diagonalisable. Réciproquement, si $Tr(K)=0$, alors $K^2=0$, d'où X^2 est un polynôme annulateur de la matrice K, d'où le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de X^2. Par l'absurde : si K est diagonalisable, alors K est semblable à la matrice nulle, d'où $K=0$, ce qui contredit le rang égal à 1.

4) Supposons que $P=yy^T$ et que $||y||=1$. Alors P est de rang 1 d'après la question 1 car $y\neq 0$. $P^2=yy^Tyy^T=||y||^2P=P$, donc P est projecteur. De plus, noyau et image de P sont des *sev* orthogonaux car $\mathrm{Im}(P)=\mathrm{Vect}(y)$ et $\mathrm{Ker}(P)=[\mathrm{Vect}(y)]^\perp$ d'après la question 1.

Réciproquement, supposons que P est une projection orthogonale de rang 1. On écrit $P=uv^T$ grâce à la question 1. De plus, les image $\mathrm{Im}(P)=\mathrm{Vect}(u)$ et noyau $\mathrm{Ker}(P)=[\mathrm{Vect}(v)]^\perp$ sont des *sev* orthogonaux, d'où $\exists\lambda\neq 0,\ u=\lambda v$. Alors $P=\lambda vv^T$. Comme P est un projecteur de rang 1, $\mathrm{Tr}(P)=1=\lambda||v||^2$. On en déduit que $\lambda=1/||v||^2$ et on peut ainsi écrire $P=ww^T$ où le vecteur $w=\frac{v}{||v||}$ est de norme 1.

5) En calculant le produit matriciel par blocs :

$$\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & 0\\ v^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n+uv^T & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & 0\\ -v^T & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n+uv^T & u\\ (1+\langle u,v\rangle)v^T & 1+\langle u,v\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & 0\\ -v^T & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n+uv^T-uv^T & u\\ (1+\langle u,v\rangle)v^T-(1+\langle u,v\rangle)v^T & 1+\langle u,v\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{I}_n & u\\ 0 & 1+\langle u,v\rangle\end{pmatrix}$$

puis il vient que $1\times\det(\mathbb{I}_n+uv^T)\times 1=1+\langle u,v\rangle$ en égalisant les déterminants, qui sont bien triangulaires par blocs. Donc $\det(\mathbb{I}_n+uv^T)=1+\langle v,u\rangle$. La matrice A étant inversible, on en déduit que $\det(A+uv^T)=\det(A(\mathbb{I}_n+A^{-1}uv^T))$. Donc $\det(A+uv^T)=\det(A)(1+\langle v,A^{-1}u\rangle)$.

Enfin, $\det(A)\neq 0$, d'où $A+uv^T\in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $1+\langle v,A^{-1}u\rangle\neq 0$, ce qui est équivalent à $\langle v,A^{-1}u\rangle\neq -1$.

6) Calculons le produit :

$$\left(A^{-1}-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+\langle v,A^{-1}u\rangle}\right)(A+uv^T)=\mathbb{I}_n+A^{-1}uv^T-\frac{A^{-1}uv^TA^{-1}A+A^{-1}uv^TA^{-1}uv^T}{1+\langle v,A^{-1}u\rangle}$$

$$=\mathbb{I}_n+A^{-1}uv^T-\frac{A^{-1}uv^T+A^{-1}u\langle v,A^{-1}u\rangle v^T}{1+\langle v,A^{-1}u\rangle}=\mathbb{I}_n+A^{-1}uv^T-\frac{(1+\langle v,A^{-1}u\rangle)A^{-1}uv^T}{1+\langle v,A^{-1}u\rangle}=\mathbb{I}_n$$

Donc $(A+uv^T)^{-1}=A^{-1}-\dfrac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+\langle v,A^{-1}u\rangle}$.

7) Soit u un vecteur de norme 1. Alors $P=uu^T$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)$ d'après la question 4. D'où $Q=\mathbb{I}_n-P$ est la projection orthogonale sur $[\mathrm{Vect}(u)]^\perp$. La matrice Q n'est donc pas inversible, d'où $\det(Q)=0$. Mais $\det(Q+uu^T)=\det(Q+P)=\det(\mathbb{I}_n)=1\neq 0$.