Colle n° 12

Produits scalaires

Exercice 1. On munit l'*ev* $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Les *sev*
$$F = \{f \in E \mid \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{g \in E \mid \forall t \in [0,1], g(t) = 0\}$$
sont-ils orthogonaux ? supplémentaires ?
2. $F^{\perp}$ est-il égal à G ? $(F^{\perp})^{\perp}$ est-il égal à F ?

Exercice 2.

1. Montrer que
$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} f'(t)g'(t)\,dt$$
définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^1([0, \pi/2])$.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels
$$F = \{f \in \mathcal{C}^2([0,\pi/2]) \mid f'' - f = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = 0\}$$
sont orthogonaux.
3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel F et montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires.
4. Soient deux réels α et β. Soit $E(\alpha, \beta) = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(\pi/2) = \beta\}$. Montrer que toutes les fonctions de $E(\alpha,\beta)$ ont le même projeté orthogonal sur F. Quel est-il ? En déduire
$$\inf_{f \in E(\alpha,\beta)} \int_0^{\pi/2} \left([f(t)]^2 + [f'(t)]^2\right)\,dt.$$

Exercice 3. Soit E un espace euclidien, u un vecteur de E tel que $||u|| = 1$.
Pour chaque réel α, on définit l'endomorphisme φ_α par :

$$\forall x \in E,\ \varphi_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, u\rangle u.$$

1. Interpréter géométriquement les endomorphismes φ_{-1} et φ_{-2}.
2. Calculer $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer un polynôme annulateur de l'endomorphisme φ_α.
4. Pour quelles valeurs du réel α l'endomorphisme φ_α est-il bijectif ?
5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme φ_α. Est-il diagonalisable ?