

F E U I L L E D E T . D . N° 1 0
Variables aléatoires

Exercice 1. 1. Une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} suit une loi de probabilité vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n + 1) = \frac{4}{n + 1} P(X = n).$$

Déterminer la loi de probabilité de X , c'est-à-dire calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soient un réel $p \in]0, 1[$ et une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = p \cdot P(X \geq n).$$

Quelle est cette loi de probabilité ?

Exercice 2 (Loi de Poisson). Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

1. Exprimer l'événement « X prend une valeur paire » comme une union disjointe. De même pour l'événement « X prend une valeur impaire ».
2. Calculer la probabilité que la valeur de X soit paire et calculer la probabilité que la valeur de X soit impaire. Comparer ces deux probabilités.
3. Soit n un entier naturel tel que $n + 1 > \lambda$. Montrer que :

$$P(X \geq n) \leq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}}.$$

4. En déduire que : $P(X \geq n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} P(X = n)$.

5. Montrer que : $P(X > n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (P(X = n))$.

Exercice 3 (Loi géométrique & continuité décroissante). Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce de monnaie qui tombe sur *pile* avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Le premier qui obtient *pile* gagne le jeu. C'est A qui commence à jouer.

1. Quelle est la probabilité que A gagne ? Quelle est la probabilité que B gagne ? L'un des deux joueurs a-t-il plus de chances de gagner que l'autre ?
2. Calculer (de deux manières ?) la probabilité que le jeu ne s'arrête pas. Au quantième lancer peut-on espérer avoir un gagnant ?

Exercice 4 (Loi binomiale, espérance & variance). Un marcheur se déplace sur une droite en faisant un pas vers la droite avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n sa position après n pas et D_n le nombre de pas vers la droite parmi ces n pas.

Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire D_n . En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_n .

Exercice 5 (Le problème du collectionneur, loi géométrique & espérance). Chaque paquet de lessive de la marque *Bonux* contient un cadeau, choisi au hasard parmi n cadeaux équiprobables. On note S_k le nombre de paquets achetés jusqu'à obtenir k cadeaux différents. (Par suite $S_1 = 1$ et, pour chaque $k \geq 2$, S_k est une variable aléatoire.)

1. Pour chaque $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, soit $X_k = S_k - S_{k-1}$. Déterminer la loi de probabilité de X_k .
2. En déduire l'espérance $E(S_n)$ et montrer que $E(S_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$.

Exercice 6 (Série génératrice & espérance). Au concours de saut en hauteur, Zébulon tente de franchir une à une les hauteurs $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Au premier échec, Zébulon est éliminé. La probabilité de franchir chaque hauteur n est $\frac{1}{n}$. On suppose les sauts indépendants et on note X le numéro du dernier saut réussi par Zébulon.



FIGURE 1 – ZÉBULON

1. Proposer un univers Ω et déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X .
2. Déterminer la loi de X , vérifier par le calcul que $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$. Qu'en déduire ?
3. Ecrire la série génératrice de la variable aléatoire X , montrer que son rayon de convergence est infini et que :
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad G_X(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t}.$$
4. En déduire que la variable X est d'espérance finie et calculer $E(X)$, c'est-à-dire la hauteur que peut espérer franchir Zébulon.

Exercice 7 (Loi binomiale, inégalité de Markov & inégalité de concentration).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, deux réels p et q dans $]0, 1[$ tels que $q \geq p$ et S_n une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Soit un réel $u \geq 0$. Rappeler l'espérance $E(S_n)$. Montrer que la variable aléatoire e^{uS_n} est d'espérance finie et que $E(e^{uS_n}) = (1 - p + pe^u)^n$.
2. Montrer que

$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \frac{(1-p+pe^u)^n}{e^{\frac{p+q}{2}nu}}.$$

3. On note $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \ln(1 - p + pe^u)$.

- (a) Exprimer $g''(u)$ sous la forme $\frac{\alpha(u)\beta(u)}{(\alpha(u) + \beta(u))^2}$.
- (b) Montrer que $g''(u) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.
- (c) Montrer que :

$$\forall u \geq 0, \quad \ln(1 - p + pe^u) \leq pu + \frac{u^2}{8}.$$

4. Prouver l'inégalité de concentration suivante :

$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

Exercice 8 (Fonction de répartition & continuité décroissante). Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{R} . La **fonction de répartition** de X est la fonction définie par

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad a \mapsto F_X(a) = P(X \leq a).$$

1. Montrer que la fonction F_X est croissante.
2. En utilisant la fonction F_X , calculer $P(a < X \leq b)$ pour tout $a \leq b$.
3. Soit (a_n) une suite de réels tendant vers $-\infty$ en décroissant. En utilisant la suite des événements $A_n = (X \leq a_n)$, montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
4. Etudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x)$.
5. Soit un réel a . Soit a_n une suite de réels tendant vers a en décroissant. En utilisant la suite des événements $B_n = (X \leq a_n)$, montrer que F est continue à droite en a .
6. En utilisant la suite des événements $C_n = (a - \frac{1}{n} < X \leq a)$, montrer que $F(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) + P(X = a)$. À quelle condition la fonction de répartition est-elle continue en a ?

Et aussi : les exercices 95,100,104,109 de la banque CCINP & l'exercice 1 du DS n°5 MPI/* 2024-2025 qui porte sur séries entières et variables aléatoires.