CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE T.D. N° 10

Variables aléatoires

4 janvier 2026

Exercice 1. 1. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi de probabilité vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n+1) = \frac{4}{n+1} P(X = n).$$

Déterminer la loi de probabilité de X, c'est-à-dire calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soient un réel $p \in]0,1[$ et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = p \cdot P(X \geq n).$$

Quelle est cette loi de probabilité ?

---

1. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P(X = n) = P(X = 0)\frac{4^n}{n!}.$$
En utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 0)\frac{4^n}{n!} = 1$ on obtient
$$P(X = n) = e^{-4}\frac{4^n}{n!}.$$
Donc X suit une loi de Poisson de paramètre 4.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(X = n) - P(X = n+1) = p \cdot P(X \geq n) - p \cdot P(X \geq n+1) = p \cdot P(X = n)$$
car $(X \geq n) = (X = n) \cup (X \geq n+1)$ et cette union est disjointe. On en déduit la relation
$$P(X = n+1) = (1-p)P(X = n)$$
qui permet de démontrer par récurrence que : $P(X = n) = (1-p)^{n-1}P(X = 1)$.

Pour déterminer $P(X = 1)$, on remarque que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(X = n)$ est une union certaine et disjointe, d'où :
$$1 = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}P(X = 1) = \frac{1}{1-(1-p)}P(X = 1).$$
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1-p)^{n-1}p.$$
La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p.

<u>Autre méthode</u> : l'hypothèse $P(X = n) = p \cdot P(X \geq n)$ implique, pour $n = 1$, que $P(X = 1) = p \cdot P(X \geq 1)$. Or $(X \geq 1)$ est l'événement certain, d'où $P(X \geq 1) = 1$, donc $P(X = 1) = p$ et on conclut comme ci-dessus.

Exercice 2 (Loi de Poisson)**.** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Exprimer l'événement « X prend une valeur paire » comme une union disjointe. De même pour l'événement « X prend une valeur impaire ».
2. Calculer la probabilité que la valeur de X soit paire et calculer la probabilité que la valeur de X soit impaire. Comparer ces deux probabilités.

3. Soit n un entier naturel tel que $n+1>\lambda$. Montrer que :

$$P(X \geq n) \leq \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{n+1}}.$$

4. En déduire que : $P(X \geq n) \underset{n\to\infty}{\sim} P(X=n)$.
5. Montrer que : $P(X>n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(P(X=n)\right)$.

---

1. L'événement « X prend une valeur paire » est $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X=2k)$ tandis que l'événement « X prend une valeur impaire » est $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X=2k+1)$ et ces unions sont disjointes.
2. La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, d'où $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}$. La probabilité que la valeur de X soit :
   — paire est $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot \mathrm{ch}(\lambda)$;
   — impaire est $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=2k+1) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot \mathrm{sh}(\lambda)$

   d'après la question précédente. La valeur de X a plus de chances d'être paire qu'impaire car

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}\lambda = \frac{\mathrm{e}^{+\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}}{2} > \mathrm{sh}\lambda = \frac{\mathrm{e}^{+\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}.$$

3. Soit n un entier naturel tel que $n+1>\lambda$. L'événement $(X\geq k)$ est égal à $\bigcup_{k\geq n}(X=k)$ et cette union est disjointe, d'où :

$$P(X\geq n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=n+k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k n!}{(n+k)!}.$$

   Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0\leq \frac{\lambda^k n!}{(n+k)!} \leq \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^k$ et la série géométrique $\sum\left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^k$ converge car $n+1>\lambda$. Sa somme est $\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n+1}}$. Donc $P(X\geq n)\leq \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n+1}}$.
4. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $(X=n)\subset(X\geq n)$, d'où $P(X=n)\leq P(X\geq n)$ par croissance de la probabilité. Par suite, $P(X=n)\leq P(X\leq n)\leq P(X=n)\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n+1}}$ d'après la question précédente. On divise par $P(X=n)$ qui n'est pas nul et, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{P(X\geq n)}{P(X=n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $P(X\geq n)\underset{n\to\infty}{\sim} P(X=n)$.
5. $(X\geq n) = (X>n)\cup(X=n)$ et cette union est disjointe, d'où

$$P(X\geq n) = P(X>n)+P(X=n),$$

   donc $P(X>n) = P(X\geq n) - P(X=n)$.

   Or $P(X\geq n)\sim P(X=n)$, d'où $P(X\geq n) = P(X=n)\cdot(1+\varepsilon_n)$.

   D'où $P(X>n) = P(X=n)\cdot(1+\varepsilon_n) - P(X=n) = P(X=n)\cdot\varepsilon_n$.

   Donc $P(X>n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(P(X=n)\right)$.

Exercice 3 (Loi géométrique & continuité décroissante)**.** Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce de monnaie qui tombe sur *pile* avec la probabilité $p\in]0,1[$. Le premier qui obtient *pile* gagne le jeu. C'est A qui commence à jouer.

1. Quelle est la probabilité que A gagne ? Quelle est la probabilité que B gagne ? L'un des deux joueurs a-t-il plus de chances de gagner que l'autre ?
2. Calculer (de deux manières ?) la probabilité que le jeu ne s'arrête pas. Au quantième lancer peut-on espérer avoir un gagnant ?

1. Soit T le temps d'attente du premier *pile*. La variable aléatoire T suit une loi géométrique de paramètre p car les lancers forment une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T = k) = q^{k-1} \cdot p, \text{ où } q = 1 - p$$

   - L'événement A_n « le joueur A gagne à son n-ième lancer » est égal à $(T = 2n - 1)$ car le joueur A commence puis joue une fois sur deux. D'où

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(A_n) = q^{2n-2} \cdot p.$$

   L'événement « le joueur A gagne » est égal à $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et cette union est disjointe, donc la probabilité que le joueur A gagne est

   $$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-2} \cdot p = p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{2-p}.$$

   - L'événement B_n « le joueur B gagne à son n-ième lancer » est égal à $(T = 2n)$ car le joueur A commence puis B joue une fois sur deux. D'où

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(B_n) = q^{2n-1} \cdot p.$$

   L'événement « le joueur B gagne » est égal à $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ et cette union est disjointe, donc la probabilité que le joueur B gagne est

   $$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1} \cdot p = pq \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

   - Le joueur A a plus de chances de gagner que le joueur B car

   $$\frac{1}{2-p} > \frac{1-p}{2-p}.$$

2. L'événement « le jeu ne s'arrête pas » est le contraire de $A \cup B$. Or cette union est disjointe, d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{1}{2-p} + \dfrac{1-p}{2-p} = 1$. Donc la probabilité que le jeu ne s'arrête pas est nulle. Cet événement est donc presque impossible.

   <u>Autre méthode :</u> l'événement « le jeu ne s'arrête pas » est égal à « la pièce tombe toujours sur *face* », donc égal à $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, où F_n est l'événement « la pièce tombe les n premières fois sur *face* ». Or la suite (F_n) est décroissante car $F_{n+1} \subset F_n$. D'où (théorème de la continuité décroissante) : $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(F_n) = 0$ car $P(F_n) = q^n$ et $|q| < 1$.

   La variable aléatoire T suit la loi $\mathcal{G}(p)$, elle possède donc une espérance finie et $E(T) = \frac{1}{p}$.

Exercice 4 (Loi binomiale, espérance & variance)**.** Un marcheur se déplace sur une droite en faisant un pas vers la droite avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n sa position après n pas et D_n le nombre de pas vers la droite parmi ces n pas.

Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire D_n. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_n.

Les n pas sont des épreuves de Bernoulli, qu'on suppose indépendantes. La variable aléatoire D_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, d'où

$$\begin{cases} D_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \\ \forall k \in [\![0, n]\!], \; P(D_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ E(D_n) = np \\ V(D_n) = npq \end{cases}.$$

Or $X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$ est la position après D_n pas vers la droite et $n - D_n$ pas vers la gauche. D'où

$$\begin{cases} X_n(\Omega) \subset [\![-n, +n]\!] \\ \forall k \in [\![-n, +n]\!], \; P(X_n = k) = P\left(D_n = \frac{n+k}{2}\right) \\ E(X_n) = E(2D_n - n) = 2E(D_n) - n = 2np - n \\ V(X_n) = V(2D_n - n) = 4V(D_n) = 4npq \end{cases}.$$

FIGURE 1 – BONUX

Exercice 5 (Le problème du collectionneur, loi géométrique & espérance)**.** Chaque paquet de lessive de la marque *Bonux* contient un cadeau, choisi au hasard parmi n cadeaux équiprobables. On note S_k le nombre de paquets achetés jusqu'à obtenir k cadeaux différents. (Par suite $S_1 = 1$ et, pour chaque $k \geq 2$, S_k est une variable aléatoire.)

1. Pour chaque $k \in [\![2, n]\!]$, soit $X_k = S_k - S_{k-1}$. Déterminer la loi de probabilité de X_k.
2. En déduire l'espérance $E(S_n)$ et montrer que $E(S_n) \underset{n\to\infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$.

---

1. Pour chaque $k \in [\![2, n]\!]$, la variable aléatoire $X_k = S_k - S_{k-1}$ est le temps d'attente d'un succès. On appelle succès : obtenir un cadeau différent des $k-1$ cadeaux déjà obtenus. La probabilité d'un succès est donc $p_k = \dfrac{n-(k-1)}{n}$ et la variable aléatoire X_k suit une loi géométrique de paramètre p_k car les achats forment une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
2. $S_n = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_2 - S_1) + S_1 = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} X_k$. D'où (par linéarité de l'espérance) : $E(S_n) = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} E(X_k)$. Or $E(X_k) = \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{n}{n-(k-1)}$. D'où $E(S_n) = 1 + \dfrac{n}{n-1} + \dfrac{n}{n-2} \cdots + \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{1} = n \cdot H_n$, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots \dfrac{1}{n} \sim \ln n$ (ne pas oublier de le démontrer en comparant série et intégrale).

   Donc $E(S_n) \underset{n\to\infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$.

Exercice 6 (Série génératrice & espérance)**.** Au concours de saut en hauteur, Zébulon tente de franchir une à une les hauteurs $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$ Au premier échec, Zébulon est éliminé. La probabilité de franchir chaque hauteur n est $\frac{1}{n}$. On suppose les sauts indépendants et on note X le numéro du dernier saut réussi par Zébulon.

FIGURE 2 – ZÉBULON

1. Proposer un univers Ω et déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X.

2. Déterminer la loi de X, vérifier par le calcul que $\sum_{k\in X(\Omega)} P(X=k)=1$. Qu'en déduire ?
3. Ecrire la série génératrice de la variable aléatoire X, montrer que son rayon de convergence est infini et que :
$$\forall t\in\mathbb{R}^*,\quad G_X(t)=\frac{te^t-e^t+1}{t}.$$
.
4. En déduire que la variable X est d'espérance finie et calculer $E(X)$, c'est-à-dire la hauteur que peut espérer franchir Zébulon.

---

1. L'univers Ω ne sert pas à grand chose ici mais puisqu'on le demande : appelons résultat une suite de E (pour échec) et de S (pour succès), en faisant comme si Zébulon continuait de sauter même après avoir échoué : alors $\Omega=\{S;E\}^{\mathbb{N}^*}$.

   L'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire X est $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. On a supposé que Zébulon n'est pas Superman et finira donc par échouer, mais les amateurs de super-héros poseront $X(\Omega)=\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$.
2. L'événement $(X=k)$ est « le sportif réussit les k premiers sauts et rate le $(k+1)$-ième saut. » En supposant les sauts indépendants, on obtient :
$$P(X=k)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\dots\cdot\frac{1}{k}\cdot\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k}{(k+1)!}.$$
   On peut aussi écrire $P(X=k)=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$, pour faire apparaître un télescope. Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{N}P(X=k)=1-\frac{1}{(N+1)!}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}1,\quad\text{donc}\quad\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=1.$$
   On en déduit que l'événement « Zébulon passe toutes les hauteurs » est presque impossible.
3. La série génératrice de la variable aléatoire X est la série entière
$$\sum P(X=k)\cdot t^k=\sum\frac{k}{(k+1)!}t^k.$$
   Son rayon de convergence est $+\infty$ car (règle de D'Alembert) : $\frac{\left|\frac{k+1}{(k+2)!}t^{k+1}\right|}{\left|\frac{k}{(k+1)!}t^k\right|}\frac{k+1}{k(k+2)}|t|\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$G_X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)\cdot t^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}t^k=t\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{t^k}{(k+1)!}.$$
   On peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, d'où :
$$\forall t\in\mathbb{R},\ G_X(t)=t\cdot\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{(k+1)!}.$$
   Or, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{(k+1)!}=\frac{e^t-1-t}{t}$. Donc, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$,
$$G_X(t)=\frac{te^t-e^t+1}{t}.$$
4. La fonction G_X est dérivable en 1, donc la variable aléatoire X est d'espérance finie et $E(X)=G'_X(1)$. Or, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, $G'_X(t)=\frac{d}{dt}\frac{te^t-e^t+1}{t}=\frac{t^2e^t-te^t+e^t-1}{t^2}$. Donc $E(X)=e-1$.

Exercice 7 (Loi binomiale, inégalité de Markov & inégalité de concentration)**.**

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, deux réels p et q dans $]0,1[$ tels que $q\geq p$ et S_n une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Soit un réel $u\geq 0$. Rappeler l'espérance $E(S_n)$. Montrer que la variable aléatoire e^{uS_n} est d'espérance finie et que $E(e^{uS_n})=(1-p+pe^u)^n$.

2. Montrer que
$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \frac{(1-p+p\mathrm{e}^u)^n}{\mathrm{e}^{\frac{p+q}{2}nu}}.$$

3. On note $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ u \mapsto \ln(1-p+p\mathrm{e}^u)$.
   (a) Exprimer $g''(u)$ sous la forme $\dfrac{\alpha(u)\beta(u)}{(\alpha(u)+\beta(u))^2}$.
   (b) Montrer que $g''(u) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que :
$$\forall u \geq 0, \quad \ln(1-p+p\mathrm{e}^u) \leq pu + \frac{u^2}{8}.$$

4. Prouver l'inégalité de concentration suivante :
$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \mathrm{e}^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

---

1. $S_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et, pour chaque $k \in [\![0,n]\!]$, $P(S_n = k) = \dbinom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

   La variable aléatoire S_n possède un espérance, égale à $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k)\cdot k = np$.

   D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire e^{uS_n} possède aussi une espérance car l'ensemble $S_n(\Omega)$ est fini et cette espérance est égale à
$$E(\mathrm{e}^{uS_n}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\mathrm{e}^{ku} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p\mathrm{e}^u)^k(1-p)^{n-k} = (1-p+p\mathrm{e}^u)^n.$$

2. Pour rappel (de l'inégalité de Markov) : si X une variable aléatoire, à valeurs positives, possédant une espérance $E(X)$, alors, pour tout $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$.

   Si $u = 0$, l'inégalité est banale. Supposons $u > 0$. On choisit $a = \mathrm{e}^{\frac{p+q}{2}nu} > 0$ et on applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $X = \mathrm{e}^{uS_n}$, qui est bien à valeurs positives. Les deux événements $(X \geq a)$ et $\left(S_n \geq \dfrac{p+q}{2}n\right)$ sont égaux (car la fonction $t \mapsto \exp(ut)$ est strictement croissante), d'où :
$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \frac{(1-p+p\mathrm{e}^u)^n}{\mathrm{e}^{\frac{p+q}{2}nu}}.$$

3. (a) La fonction g est deux fois dérivable. Pour tout $u \geq 0$, $g'(u) = \dfrac{p\mathrm{e}^u}{1-p+p\mathrm{e}^u}$ et $g''(u) = \frac{qp\mathrm{e}^u}{(q+p\mathrm{e}^u)^2} = \frac{\alpha(u)\beta(u)}{(\alpha(u)+\beta(u))^2}$, en notant $\alpha(u) = q$ et $\beta(u) = p\mathrm{e}^u$.
   (b) Or $[\alpha(u)+\beta(u)]^2 \geq 4\alpha(u)\beta(u)$ car $[\alpha(u)+\beta(u)]^2 - 4\alpha(u)\beta(u) = [\alpha(u)-\beta(u)]^2 \geq 0$, donc $g''(u) \leq \frac{1}{4}$.
   (c) La fonction g'' est continue, d'où : $g'(u) - g'(0) = \int_0^u g''(t)\,dt \leq \int_0^u \frac{1}{4}\,dt = \frac{u}{4}$ par croissance de l'intégrale. Or $g'(0) = p$, d'où $g'(u) \leq p + \frac{u}{4}$. La fonction g' est continue, d'où $g(u) - g(0) = \int_0^u g'(t)\,dt \leq \int_0^u (p + \frac{t}{4})\,dt = pu + \frac{u^2}{8}$ par croissance de l'intégrale. Or $g(0) = 0$, donc : $g(u) \leq pu + \dfrac{u^2}{8}$.

4. On a montré que, pour tout $u \geq 0$,
$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \frac{(1-p+p\mathrm{e}^u)^n}{\mathrm{e}^{\frac{p+q}{2}nu}}. \qquad (*)$$

   Or $\dfrac{(1-p+p\mathrm{e}^u)^n}{\mathrm{e}^{\frac{p+q}{2}nu}} = \mathrm{e}^{ng(u)-\frac{p+q}{2}nu} \leq \mathrm{e}^{n\left[pu+\frac{u^2}{8}-\frac{p+q}{2}u\right]}$.

   Alors $\left[pu + \frac{u^2}{8} - \frac{p+q}{2}u\right] = -\frac{1}{8}\cdot u\cdot(4(q-p)-u) = -\frac{(p-q)^2}{2}$ si $u = 2(q-p)$. L'inégalité $(*)$ étant vraie pour tout $u \geq 0$, elle l'est en particulier si $u = 2(q-p)$ qui est bien positif car on suppose que $q \geq p$. Donc
$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \mathrm{e}^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

Exercice 8 (Fonction de répartition & continuité décroissante)**.** Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. La **fonction de répartition** de X est la fonction définie par

$$F_X \,:\, \mathbb{R} \to [0,1],\ a \mapsto F_X(a) = P(X \leq a).$$

1. Montrer que la fonction F_X est croissante.
2. En utilisant la fonction F_X, calculer $P\left(a < X \leq b\right)$ pour tout $a \leq b$.
3. Soit (a_n) une suite de réels tendant vers $-\infty$ en décroissant. En utilisant la suite des événements $A_n = (X \leq a_n)$, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
4. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)$.
5. Soit un réel a. Soit a_n une suite de réels tendant vers a en décroissant. En utilisant la suite des événements $B_n = (X \leq a_n)$, montrer que F est continue à droite en a.
6. En utilisant la suite des événements $C_n = \left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right)$, montrer que $F(a) = \lim\limits_{x\to a^-} F(x) + P(X = a)$.

   À quelle condition la fonction de répartition est-elle continue en a ?

---

1. Soient deux réels a et b. Si $a \leq b$, alors $(X \leq a) \subset (X \leq b)$, d'où (par croissance de la probabilité) : $P(X \leq a) \leq P(X \leq b)$.
2. Soient deux réels a et b : $]-\infty, b] =]-\infty, a] \cup]a, b]$, d'où $\quad X^{-1}\left(]-\infty, b]\right) = X^{-1}\left(]-\infty, a]\right) \cup X^{-1}\left(]a, b]\right)$,

   d'où $\quad (X \leq b) = (X \leq a) \cup (a < X \leq b)$ et cette union est disjointe, d'où $\quad P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$.
3. D'après le théorème de la limite monotone, la fonction F_X possède une limite ℓ_1 en $-\infty$, finie ou infinie. Soit (a_n) une suite de réels qui tend vers $-\infty$ en décroissant. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'événement $A_{n+1} = (X \leq a_{n+1})$ est inclus dans l'événement $A_n = (X \leq a_n)$, d'où (par le théorème de continuité décroissante) : $P\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$. Or $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} F_X(a_n) = 0$, donc $\ell_1 = 0$.
4. D'après le théorème de la limite monotone, la fonction F_X possède une limite ℓ_2 en $+\infty$, finie ou infinie. Soit (a_n) une suite de réels qui tend vers $+\infty$ en croissant. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'événement $A_n = (X \leq a_n)$ est inclus dans l'événement $A_{n+1} = (X \leq a_{n+1})$, d'où (par le théorème de continuité croissante) : $P\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$. Or $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} F_X(a_n) = 1$, donc $\ell_2 = 1$.
5. Soient un réel a et une suite (a_n) qui tend vers a en décroissant. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'événement $B_{n+1} = (X \leq a_{n+1})$ est inclus dans l'événement $B_n = (X \leq a_n)$, d'où (continuité décroissante) : $P\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n)$.

   Or $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est l'événement $(X \leq a)$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} F_X(a_n) = F_X(a)$. Or la fonction F est croissante, elle admet donc une limite en a^+. Comme $a_n \to a^+$, on en déduit $\lim\limits_{x\to a^+} F_X(x) = F_X(a)$. Donc la fonction F_X est continue à droite en a.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de l'événement $C_n = \left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right)$ est $(*)$: $P(C_n) = F_X(a) - F_X\left(a - \frac{1}{n}\right)$ d'après le 1.

   D'après le théorème de continuité décroissante, $\lim\limits_{n\to\infty} P(C_n) = P(X = a)$ car $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} C_n$ est l'événement $(X = a)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} \subset C_n$. De plus, la fonction F_X est croissante, d'où (théorème de la limite monotone), la fonction F_X admet une limite en a^-, d'où $F_X\left(a - \dfrac{1}{n}\right) \longrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} F_X(x)$.

   D'où l'égalité $(*)$ passe à la limite : $F_X(a) = \lim\limits_{x\to a^-} F_X(x) + P(X = a)$. La fonction F_X est donc continue à gauche en a *ssi* $P(X = a) = 0$. Elle est par ailleurs toujours continue à droite en a d'après la question précédente. Donc la fonction de répartition est continue en a *ssi* $P(X = a) = 0$.

Et aussi : les exercices 95,100,104,109 de la banque CCINP & l'exercice 1 du DS n° 5 MPI/* 2024-2025 qui porte sur séries entières et variables aléatoires.