D.S. n° 5 de mathématiques

Cet énoncé comporte deux exercices et un problème.
L'exercice 1 est tiré de CCINP 2024 MPI Math 2.
Le problème est tiré de Centrale PSI 2022 Math 2.
L'exercice 2 est tiré de X-ENS 2025 PC Math 2.

---

9 Exercice 1

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$, où $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, et on note f sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

1,5 **1)** Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $D =]0, +\infty[$. $\sum f_n(x)$ dv si $x \leq 0$ 0,5 , cv si $x > 0$ 1

1,5 **2)** Démontrer que f est continue sur D. $\sum f_n$ CVN 0,5 sur $[a, +\infty[$ 0,5 $\forall a > 0$ donc f C^0 sur $]0, +\infty[$ 0,5

1,5 **3)** Étudier la limite de f en $+\infty$. Théo de la double limite 0,5 sur $[1, +\infty[$ 0,5 , lim = 1 0,5

3 **4)** Soit $x \in D$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt$ est convergente et la calculer. CDV $u = \sqrt{t}$ 0,5 Hyp CDV 0,5 Nature 0,5 IPP 0,5 Hyp IPP 0,5 $= \frac{2}{x^2}$ 0,5

1,5 **5)** En déduire un équivalent de f au voisinage de 0. Encadrement 0,5
Passage à la limite et gendarmes 0,5
$\sim \frac{2}{x^2}$ 0,5

Problème

Ce problème étudie quelques propriétés d'un opérateur intégral U défini sur un espace préhilbertien réel E. Cet espace et son produit scalaire sont introduits dans la **partie I** et l'endomorphisme U est étudié dans la **partie II**. La **partie III** recherche, à l'aide d'une équation différentielle, des valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme U.

On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$

telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{e^{-t}}{t}dt$ converge.

8

Partie 1

2 **1)** Soient a et b deux nombres réels. Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & ae^t + b \end{array}$$

appartient à E si, et seulement si, $a = b = 0$.

2 **2)** Soit P une fonction polynomiale. Montrer que la restriction de P à $\mathbb{R}_+^*$ appartient à E si, et seulement si, $P(0) = 0$.

2 **3)** Montrer que, si f et g sont deux fonctions de E, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t}dt$ est absolument convergente.

1 **4)** En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour toutes fonctions $f \in E$ et $g \in E$, on pose $\displaystyle\langle f|g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t}dt.$

1 **5)** Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

La norme associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction $f \in E$ par

$$||f|| = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{e^{-t}}{t}dt}.$$

18

Partie 2

1,5 **6)** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note

0,5 $\int_0^{+\infty}$ cv $\iff \int_0^{x}$ et $\int_x^{+\infty}$ convergent

0,5 $\int_0^{x}$ cv car

$$k_x(t) = e^{\min(x,t)} - 1$$

0,5 $\int_x^{+\infty}$ cv car

où $\min(x, t)$ désigne le plus petit des réels x et t. Montrer que k_x appartient à E.

2 **7)** Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} ||k_x|| = 0$.

1 $\int_0^{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ car

1 $\int_x^{+\infty} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ car

À chaque fonction $f \in E$, on associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x > 0$ par

$$U(f)(x) = \int_0^{+\infty} (e^{\min(x,t)} - 1)f(t)\frac{e^{-t}}{t}dt.$$

1 **8)** En remarquant que $U(f)(x) = \langle k_x | f \rangle$, montrer que, pour toute fonction $f \in E$, $\lim_{x \to 0} U(f)(x) = 0$.

1,5 **9)** Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie, pour tout $x > 0$, 1

$$(U(f))'(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

0,5

Dans la suite, pour alléger les notations, la dérivée de la fonction $U(f)$ est notée $U(f)'$.

2 **10)** Montrer que, pour tout $f \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$|U(f)'(x)| \leq e^x ||f|| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2} \leq ||f|| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}.$$

1,5 0,5

3 **11)** On pose

$$\Phi(x) = \frac{4\sqrt{x} e^{x/2}}{1+x} - \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt.$$

0,5 0,5 0,5

Montrer que la fonction Φ est bien définie sur $]0, +\infty[$, que Φ est dérivable et que $\Phi'(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Étudier $\lim_{x \to 0} \Phi(x)$ 1 et en déduire que $\Phi(x)$ est positif pour tout $x > 0$. 0,5

2 **12)** On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0} f(x) = 0, \Rightarrow f(x) = \int_{]0,x]} f'(t)\,dt \quad 1 \\ \exists C > 0, \ \forall x > 0, \quad |f'(x)| \leq C \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}. \end{cases}$$

0,5 0,5

Montrer que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq 4C \frac{\sqrt{x} e^{x/2}}{1+x}$. En déduire que $f \in E$.

2 **13)** Déduire de ce qui précède que U est un endomorphisme de E et que, pour tout $f \in E$ et tout $x > 0$,

$$|U(f)(x)| \leq 4||f|| \frac{\sqrt{x} e^{x/2}}{1+x}.$$

1 **14)** En déduire que, pour tout $f \in E$,

$$||U(f)|| \leq 4||f||.$$

2 **15)** Montrer que l'endomorphisme U n'est pas surjectif.

8

Partie 3

0,5 **16)** Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction $U(f)$ est une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) = -\frac{f(x)}{x}.$$

1,5 **17)** Montrer que l'endomorphisme U est injectif. Qu'en déduire sur le spectre de U ?

1 0,5

Pour tout $p \in \mathbb{R}^*$, on note (E_p) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ suivante :

$$x\,(y''(x) - y'(x)) + p\,y(x) = 0.$$

2 **18)** Montrer que (E_p) possède des solutions polynomiales non identiquement nulles si, et seulement si, $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'alors, les solutions polynomiales non nulles de (E_p) sont de degré p 1,5 et appartiennent à l'espace vectoriel E. 0,5 (On ne demande pas de déterminer explicitement les solutions polynomiales lorsqu'elles existent.)

2 **19)** Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et P une solution polynomiale non nulle de (E_p). Démontrer que la fonction $pU(P) - P$ vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y''(x) - y'(x) = 0$.

2 **20)** En déduire que P est un vecteur propre de U associé à la valeur propre $1/p$.

16

EXERCICE 2

On note n un entier strictement positif et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de taille n. Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont notés en gras et sont identifiés à des matrices colonnes $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par exemple

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de transposée $\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$. De même, on identifie matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Enfin, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la matrice $\mathbf{x}^T\mathbf{y} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est identifiée au nombre réel $\sum_{i=1}^n x_i y_i$; l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire et de sa norme usuels, notés respectivement

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{et} \quad ||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

3 **1)** Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Montrer que K est de rang 1 si, et seulement si, il existe $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels que $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Déterminer alors $\mathrm{Im}(K)$ et $\mathrm{Ker}(K)$. 1

2 **2)** Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Montrer que $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{x}\mathbf{y}^T$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que
0,5 1,5

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}, \text{ et } \mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{y}.$$

3) Soit $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que $K = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

0,5 **a)** Montrer que $\mathrm{Tr}(K) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

0,5 **b)** Montrer que $K^2 = \mathrm{Tr}(K)K$. 1,5 0,5

2 **c)** En déduire que K est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(K) \neq 0$.

4 **4)** Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P est une projection orthogonale de rang 1 si, et seulement si, il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $||\mathbf{y}|| = 1$ et $P = \mathbf{y}\mathbf{y}^T$.
1,5 2,5

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, et soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

2 **5)** Calculer le produit matriciel par blocs
0,5

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ -\mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix}$$

0,5 $\det(\mathbb{I}_n + u v^T) = 1 + \langle v, u \rangle$

1 $\det(A + u v^T) = \det(A) \times \left(1 + \langle v, A^{-1} u \rangle\right)$

et en déduire que : $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ est inversible si, et seulement si, $\langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle \neq -1$.

1 **6)** On suppose que $A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ est inversible. Montrer que

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{u} \rangle}.$$

1 **7)** Exhiber une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\det(C) = 0 \quad \text{et} \quad \det(C + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) \neq 0.$$