

Chapitre XI Espaces vectoriels normés

Table des matières

XI.1	Normes et distances	93
XI.2	Boules	94
XI.3	Limite d'une suite	95
XI.4	Comparer des normes	96
XI.5	Adhérence	98
XI.6	Limite d'une fonction	98
XI.7	Continuité d'une fonction	99
XI.8	Linéarité & continuité	100
XI.9	Norme subordonnée	102
XI.10	Ouverts et fermés	103

XI.1 NORMES ET DISTANCES

DÉFINITION 1

Soit E un $(\mathbb{R}-$ ou $\mathbb{C}-)$ espace vectoriel. Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée une **norme** si, pour tous vecteurs $x \in E$, $y \in E$ et scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$(i) \ N(x) = 0_{\mathbb{R}} \implies x = 0_E \quad (ii) \ N(\alpha x) = |\alpha|N(x) \quad (iii) \ N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un **espace vectoriel normé** (evn).

EXERCICE 2 —

1. La valeur absolue est une norme sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R} : y en a-t-il d'autres ? Le module est une norme sur le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} : y en a-t-il d'autres ?
2. Par définition, toute norme N vérifie la propriété (iii), appelée **l'inégalité triangulaire**. En déduire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y).$$

Sur un même espace vectoriel, on peut définir plusieurs normes.

EXEMPLE 3 —

1. Voici trois normes classiques sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n (où $n \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| & \|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} & \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| & &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} & &= \max_{i \in [1, n]} |x_i| \end{aligned}$$

2. Voici trois normes classiques sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions f continues d'un segment $[a, b]$ vers $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad \|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

3. Plus généralement, si f est une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{K} , alors

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt \quad , \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt} \quad \text{ou} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$$

définit une norme sur l'ev $L_1(I) \cap \mathcal{C}(I)$ des fonctions continues et intégrables sur I , l'ev $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ des fonctions continues et de carré intégrable sur I ou l'ev des fonctions bornées sur I respectivement.

4. Si E_1, E_2, \dots, E_n sont des espaces vectoriels normés, alors on peut munir l'espace vectoriel produit $E_1 \times \dots \times E_n$ de la norme définie par $\|(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)\| =$

$$\|\vec{v}_1\| + \dots + \|\vec{v}_n\| \quad \text{ou} \quad \sqrt{\|\vec{v}_1\|^2 + \dots + \|\vec{v}_n\|^2} \quad \text{ou} \quad \max(\|\vec{v}_1\|, \dots, \|\vec{v}_n\|).$$

Une norme permet de mesurer la distance entre deux vecteurs :

DÉFINITION 4

La **distance** associée à une norme N est l'application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d(x, y) = N(y - x)$.

De la définition 1, il résulte que :

$$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \text{et} \quad \forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

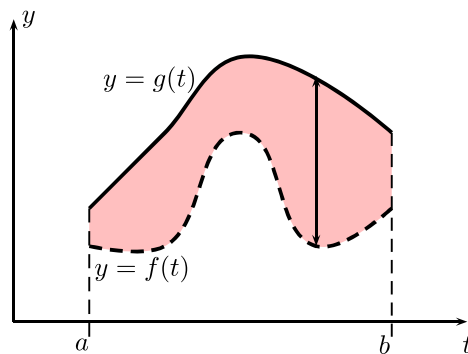


FIGURE XI.1 – DEUX DISTANCES ENTRE DEUX FONCTIONS

REMARQUE 5 — Si une norme provient d'un produit scalaire, alors on dit que cette norme est **euclidienne**. Ce produit scalaire est alors unique (car on peut le calculer grâce aux égalités de polarisation) et cette norme vérifie l'égalité du parallélogramme (remarque 9 du chapitre VIII).

Mais certaines normes ne proviennent pas d'un produit scalaire, par exemple la norme « infini » $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ sur l'ev \mathbb{R}^2 .

Preuve — Si $u = (2, 1)$ et $v = (1, 2)$, alors $\|u + v\|_\infty = 3$ $\|u - v\|_\infty = 1$ $\|u\|_\infty = 2$ $\|v\|_\infty = 2$,

d'où $\|u + v\|_\infty^2 + \|u - v\|_\infty^2 \neq 2\|u\|_\infty^2 + 2\|v\|_\infty^2$. Donc l'égalité du parallélogramme n'est pas vérifiée. \square

XI.2 BOULES

DÉFINITION 6

Soient un espace vectoriel E , une norme N , un vecteur $a \in E$ et un réel $r > 0$. On appelle :

1. **sphère** de centre a et de rayon r la partie de E définie par $\{x \in E \mid N(x - a) = r\}$;
2. **boule ouverte** de centre a et de rayon r la partie de E définie par $\{x \in E \mid N(x - a) < r\}$;
3. **boule fermée** de centre a et de rayon r la partie de E définie par $\{x \in E \mid N(x - a) \leq r\}$.

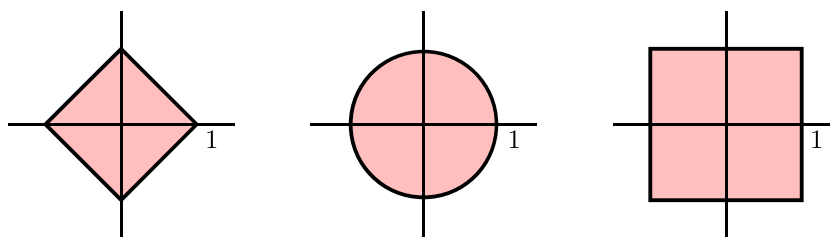


FIGURE XI.2 – LES BOULES (DE CENTRE $0_{\mathbb{R}^2}$ ET DE RAYON 1) ASSOCIÉES AUX TROIS NORMES CLASSIQUES (1, 2 ET ∞) DE \mathbb{R}^2

La boule ouverte de centre a et de rayon r est notée $B(a, r)$ tandis que la boule fermée est notée $\bar{B}(a, r)$. La sphère est $\bar{B}(a, r) \setminus B(a, r)$.

EXERCICE 7 — Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2 \leq n \cdot \|x\|_\infty.$$

DÉFINITION 8

Soient E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E . On dit que :

- (i) une partie $A \subset E$ est **bornée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \|x\| \leq M$;
- (ii) une suite $u : \mathbb{N} \rightarrow E, n \mapsto u_n$ de vecteurs est bornée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$;
- (iii) une fonction $f : D \rightarrow E, x \mapsto f(x)$ est bornée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in D, \|f(t)\| \leq M$.

Autrement dit : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$(i) A \subset B(0_E, M) \quad (ii) \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in B(0_E, M) \quad (iii) f(D) \subset B(0_E, M).$$

XI.3 LIMITE D'UNE SUITE

Dans \mathbb{R} , pour dire qu'un nombre x tend vers un nombre a , on utilise la valeur absolue :

$$x \rightarrow a \iff x - a \rightarrow 0 \iff |x - a| \rightarrow 0.$$

Dans un espace vectoriel E , pour dire qu'un vecteur x tend vers un vecteur a , on utilisera une norme :

$$x \rightarrow a \iff x - a \rightarrow 0_E \iff N(x - a) \rightarrow 0_{\mathbb{R}} \iff d(x, a) \rightarrow 0_{\mathbb{R}}.$$

DÉFINITION 9

Soient E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E . Soit une suite (u_n) d'éléments de E . Soit un vecteur $\ell \in E$. On dit que u_n tend vers ℓ si $\|u_n - \ell\|$ tend vers $0_{\mathbb{R}}$.

Autrement dit : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon)$.

PROPOSITION 10

Soit une suite (u_n) d'éléments d'un evn E .

1. **(unicité de la limite)** Il n'existe pas toujours de limite ℓ , mais, quand elle existe, elle est unique. On peut donc parler de la limite de u_n et écrire $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
2. **(cv \implies bornée)** Si la suite des vecteurs u_n converge, alors elle est bornée. (La réciproque est fausse.)

Preuve —

1. Par l'absurde : si (u_n) converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes, alors : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|u_n - \ell_1\| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \|u_n - \ell_2\| \leq \epsilon.$$

Si on choisit d'une part $\epsilon = \frac{1}{3}\|\ell_2 - \ell_1\|$ (qui est bien strictement positif car $\ell_1 \neq \ell_2$) et d'autre part $n \geq \max(N_1, N_2)$, alors : $0 < \|\ell_2 - \ell_1\| \leq \|u_n - \ell_1\| + \|u_n - \ell_2\| \leq \frac{2}{3}\|\ell_2 - \ell_1\|$. C'est absurde.

2. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \in E$, alors $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| \leq \sqrt{7}$. (on a choisi $\epsilon = \sqrt{7}$), d'où : à partir du rang N , $\|u_n - \ell\| \leq \sqrt{7}$, d'où $\|u_n\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \leq \sqrt{7} + \|\ell\|$; avant le rang N , $\|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, \dots, \|u_{N-1}\|)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq \sqrt{7} + \|\ell\| + \max(\|u_0\|, \dots, \|u_{N-1}\|)$.

□

EXERCICE 11 — La suite des fonctions $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ représentées sur la figure XI.3 est-elle bornée ? convergente ? (Utiliser la norme ∞ puis la norme 1 pour répondre.)

REMARQUE 12 (la norme « infini » est la norme de la convergence uniforme) — Si I est une partie de \mathbb{R} , alors l'ensemble E des fonctions bornées de I vers \mathbb{R} ou \mathbb{C} est un ev, qu'on peut munir d'une norme :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|.$$

Dans cet evn E ,

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f &\iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\iff \text{la suite des fonctions } f_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers la fonction } f. \end{aligned}$$

DÉFINITION 13

Soit (u_n) une suite de vecteurs de E . On dit qu'une suite (v_n) est **extraite** de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

À noter que, par récurrence, la stricte croissance de φ implique que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

PROPOSITION 14

Si une suite converge, alors toute suite extraite converge vers la même limite.

Preuve — Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n) . Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, alors $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies \|u_n - \ell\| \leq \epsilon)$. Or $\varphi(n) \geq n$, d'où $n \geq N \implies \varphi(n) \geq N \implies \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \epsilon$. □

XI.4 COMPARER DES NORMES

DÉFINITION 15

Soient N et $\|\cdot\|$ deux normes sur un espace vectoriel E . On dit que ces normes sont **équivalentes** s'il existe deux réels α et β tels que

$$\forall x \in E, \quad N(x) \leq \alpha \cdot \|x\| \quad \text{et} \quad \|x\| \leq \beta \cdot N(x).$$

REMARQUE 16 — 1. Cette relation entre deux normes est une relation d'équivalence (car elle est réflexive, symétrique et transitive).

2. Si deux normes sont équivalentes, alors ce qui converge pour l'une converge aussi pour l'autre : $N(x - a) \rightarrow 0 \iff \|x - a\| \rightarrow 0$. Et la limite ne dépend pas non plus de la norme.

Preuve — Si $\|x - a\|$ tend vers 0, alors $N(x - a)$ aussi car $N(x - a) \leq \alpha \cdot \|x - a\|$.

De même pour la réciproque. □

3. De même, être ou ne pas être borné est indépendant du choix de la norme, si les normes sont équivalentes.

4. Les trois normes classiques sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n sont équivalentes car

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

d'après l'exercice 7.

THÉORÈME 17

Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve — Voir l'annexe B. □

Donc, en dimension finie, ni la convergence ni la limite, ni le caractère borné ne dépend de la norme. Ce n'est plus vrai en dimension infinie ! C'est ce que montre l'exercice suivant.

EXERCICE 18 — 1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ vers \mathbb{R} continues. Déterminer un réel α tel que : $\forall f \in E, \quad \|f\|_1 \leq \alpha \cdot \|f\|_\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n et g_n définies sur $[0, 1]$ et représentées ci-dessous :

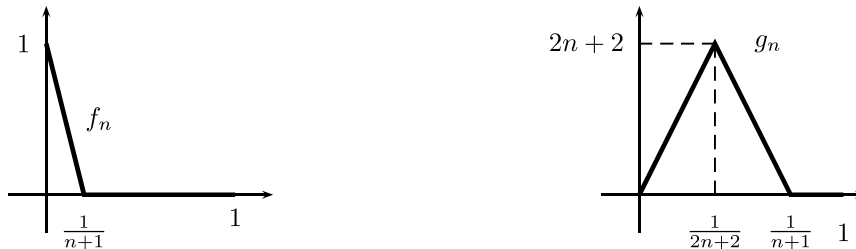


FIGURE XI.3 – DEUX SUITES DE FONCTIONS

Étudier $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$ ainsi que $\|g_n\|_1$ et $\|g_n\|_\infty$. Conclure.

COROLLAIRE 19 (coordonnée par coordonnée)

Soient un *evn* E de dimension finie, un vecteur $\ell \in E$ et une suite (u_n) de vecteurs de E :

u_n tend vers ℓ si, et seulement si, chaque coordonnée de u_n tend vers chaque coordonnée de ℓ .

Preuve — Soit d la dimension de l'*ev* E . On se place dans une base (e_1, \dots, e_d) de E . L'application

$$N : E \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d \mapsto \max_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} (|x_i|)$$

est une norme sur E . On choisit de travailler avec cette norme. D'après le théorème 17, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \iff N(u_n - \ell) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Or $N(u_n - \ell) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \max_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} |(u_n)_i - \ell_i| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, |(u_n)_i - \ell_i| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, (u_n)_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell_i$. □

EXERCICE 20 — Soient un réel a et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Montrer que la suite de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice

$$L = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

XI.5 ADHÉRENCE

DÉFINITION 21

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E .

On dit qu'un vecteur $\ell \in E$ est **adhérent** à A si toute boule centrée en ℓ rencontre A :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(\ell, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

L'**adhérence** de A , notée \bar{A} , est l'ensemble des vecteurs adhérents à A .

Tous les points de A sont adhérents à A : on a toujours $A \subset \bar{A}$. Mais pas toujours $\bar{A} \subset A$, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 22 — Soient les trois intervalles $I = [0, 1]$, $J =]0, 1]$ et $K =]0, +\infty[$ de \mathbb{R} :

$$\bar{I} = I, \quad \bar{J} = I, \quad \text{et} \quad \bar{K} = [0, +\infty[.$$

— L'adhérence $\overline{B(a, r)}$ d'une boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée de même centre a et de même rayon r .

PROPOSITION 23 (caractérisation séquentielle de l'adhérence)

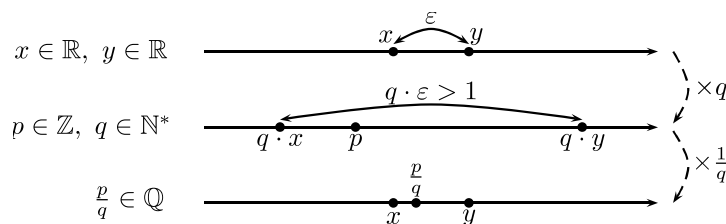
Un vecteur $\ell \in E$ est adhérent à $A \subset E$ si, et seulement si, ℓ est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de A .

Preuve — Supposons que ℓ est adhérent à A . Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B(\ell, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. Soit u_n un vecteur de $B(\ell, \frac{1}{n}) \cap A$. Chaque u_n appartient à A et la suite (u_n) tend vers ℓ . Réciproquement, supposons que $u_n \in A$ et u_n tend vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$. D'où $u_n \in B(\ell, \varepsilon)$. De plus $u_n \in A$. D'où $u_n \in B(\ell, \varepsilon) \cap A$. D'où $B(\ell, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Donc ℓ est adhérent à A . \square

DÉFINITION 24

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E . On dit que A est **dense** dans E si $\bar{A} = E$. Autrement dit : tout vecteur de E est adhérent à A . Ou encore : tout vecteur de E est la limite d'une suite de vecteurs de A .

EXEMPLE 25 — 1. \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} . Et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aussi est dense dans \mathbb{R} .


 FIGURE XI.4 – DENSITÉ DE \mathbb{Q} DANS \mathbb{R}

2. D'après le théorème V.23 d'approximation de Weierstrass, l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans l'ev $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ muni de la norme « infini ».

EXERCICE 26 — Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

XI.6 LIMITE D'UNE FONCTION

DÉFINITION 27

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit une fonction $f : D \rightarrow F$, $x \mapsto f(x)$ définie sur une partie $D \subset E$. Soient a un point adhérent à D et $\ell \in F$. On dit que $f(x)$ **tend vers ℓ quand x tend vers a** , et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ si

$$\|f(x) - \ell\| \xrightarrow{\|x-a\| \rightarrow 0} 0.$$

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \quad \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

REMARQUE 28 — 1. (abus de notation) Dans cette définition, il y a deux normes : $\|x - a\|$ est une norme sur E et $\|f(x) - \ell\|$ est une norme sur F .

2. (unicité de la limite) Il n'existe pas toujours de limite ℓ , mais, quand elle existe, elle est unique. On peut donc parler de la limite de f en a et écrire $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\ell = \lim_a f$.

PROPOSITION 29 (caractérisation séquentielle de la limite)

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si, et seulement si, à chaque fois qu'une suite (u_n) tend vers a , la suite $f(u_n)$ tend vers ℓ .

Preuve — Supposons que $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow a$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \quad \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Soit une suite (u_n) qui tend vers a . Alors $\exists N, \forall n > N, \quad \|u_n - a\| < \delta$. D'où $\forall n > N, \quad \|f(u_n) - \ell\| < \varepsilon$. Donc $f(u_n)$ tend vers ℓ . Réciproquement, supposons que $f(x)$ ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a . Alors $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \quad \|x - a\| < \delta$ et $\|f(x) - \ell\| \geq \varepsilon$. D'où, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un x tel que $\|x - a\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(x) - \ell\| \geq \varepsilon$. Appelons u_n cet x . Alors u_n tend vers a et $f(u_n)$ ne tend pas vers ℓ . \square

EXERCICE 30 — Les fonctions définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vers \mathbb{R} par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad g(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$$

possèdent-elles une limite quand (x, y) tend vers $(0, 0)$?

XI.7 CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

DÉFINITION 31

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit une fonction $f : D \rightarrow F$, $x \mapsto f(x)$ définie sur une partie $D \subset E$.

1. Soit $a \in D$. On dit que f est continue en a si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
2. Soit $A \subset D$. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A .

EXERCICE 32 — Soient f et g deux applications continues sur un espace vectoriel normé E . Soit une partie A dense dans E . Montrer que :

si $\forall x \in A, \quad f(x) = g(x)$, alors $\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$.

Autrement dit : deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

DÉFINITION 33

Soit A une partie d'un evn E . On dit qu'une fonction f est :

— **uniformément continue** sur A si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (a, x) \in A^2, \quad \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon ;$$

— **lipschitzienne** sur A si

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall (a, x) \in A^2, \|f(x) - f(a)\| \leq K \cdot \|x - a\|.$$

EXERCICE 34 — On a déjà montré à l'exercice 20 du chapitre V que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.

PROPOSITION 35

lipschitzienne \implies **uniformément continue** \implies **continue**
 $\not\Leftarrow$ $\not\Leftarrow$

Preuve — Supposons que f est lipschitzienne sur A : il existe alors $K > 0$ tel que

$$\forall (a, x) \in A^2, \|f(x) - f(a)\| \leq K \cdot \|x - a\|. \quad \text{D'où}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \forall (a, x) \in A^2, \|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{K} \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

D'où f est uniformément continue sur A .

Supposons que f est uniformément continue sur A , alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (a, x) \in A^2, \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon. \quad \text{D'où}$$

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f \text{ est continue en } a}$

D'où f est continue en tout point $a \in A$, donc sur A .

Les réciproques sont fausses d'après l'exercice précédent. □

COROLLAIRE 36

Toute norme est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue, donc continue.

Preuve — D'après l'exercice 2, toute norme N sur un *ev* E vérifie la propriété

$$\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

et est donc une application 1-lipschitzienne de l'*evn* E vers \mathbb{R} . □

XI.8 LINÉARITÉ & CONTINUITÉ

THÉORÈME 37

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit f une application linéaire de E vers F . Il y a équivalence entre :

1. f est continue sur E ;
2. f est continue en 0_E ;
3. f est bornée sur la boule unité de E ;
4. il existe un réel K tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq K\|x\|$;
5. f est lipschitzienne sur E ;
6. f est uniformément continue sur E .

Preuve — Nous savons déjà que 1. \implies 2. et 5. \implies 6. et 6. \implies 1.

2. \implies 3. car f est linéaire, d'où $f(0_E) = 0_F$ et la continuité en 0_E implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \|x\| = \|x - 0\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(0)\| = \|f(x)\| \leq 1.$$

Et, par linéarité de f : $\forall x \in E, \|x\| \leq 1 \implies \|f(x)\| \leq \frac{1}{\delta}$. Donc f est bornée sur la boule unité.

3. \implies 4. car, pour tout $x \neq 0_E$, le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, d'où $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \neq 0_E, \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq K$, donc $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \neq 0_E, \|f(x)\| \leq K\|x\|$. Et cette inégalité reste vraie si $x = 0_E$.

4. \implies 5. car, par linéarité de f : $\forall (x, a) \in E^2, \|f(x) - f(a)\| = \|f(x - a)\| \leq K\|x - a\|$. □

EXERCICE 38 — Soit l'application linéaire $d : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$. On munit l'ev $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de la norme $N : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $P = \sum_{i=0}^{\deg P} a_i X^i \mapsto \max_{0 \leq i \leq \deg P} (|a_i|)$. Montrer que d n'est pas continue.

Cet exercice montre que, sur un evn de dimension infinie, une application peut être linéaire sans être continue. Le théorème suivant montre que cela n'arrivera jamais sur un evn de dimension finie.

THÉORÈME 39

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et si E de dimension finie, alors f est lipschitzienne, donc continue sur E .

Preuve — Notons N la norme sur l'espace vectoriel E et $\|\cdot\|$ la norme sur l'espace vectoriel F . L'espace vectoriel E est de dimension finie, d'où :

- on peut choisir une base (e_1, \dots, e_d) de E et donc écrire chaque vecteur $x \in E$ sous la forme $x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$;
- on peut munir l'ev E de la norme N définie par $N(x) = \max(|x_1|, \dots, |x_d|)$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 f(e_1) + \dots + x_d f(e_d), \text{ d'où} \\ \|f(x)\| &\leq |x_1| \|f(e_1)\| + \dots + |x_d| \|f(e_d)\| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq K \cdot N(x) \quad \text{avec } K = d \times \max(\|f(e_1)\|, \dots, \|f(e_d)\|). \end{aligned}$$

- On en déduit, grâce au théorème 37, la continuité de f , pour ce choix de la norme N sur E , ou pour tout autre choix, car E est de dimension finie et les normes sont équivalentes en dimension finie.

□

EXEMPLE 40 — L'ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, donc les applications suivantes sont continues car linéaires :

- la trace $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto \text{tr } A$;
- la transposée $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^T$;
- un changement de base $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto P^{-1}AP$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

Les mêmes raisonnements valent pour les applications multilinéaires, ce que nous admettons :

PROPOSITION 41

Soient E_1, E_2, \dots, E_n et F des espaces vectoriels normés. On munit l'espace vectoriel produit $E_1 \times \dots \times E_n$ de la norme définie par $\|(v_1, \dots, v_n)\| = \max(\|v_1\|, \dots, \|v_n\|)$. Soit $f : \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow F$ une application multilinéaire : f est continue ssi il existe un réel K tel que

$$\forall (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \prod_{i=1}^n E_i, \quad \|f(v_1, v_2, \dots, v_n)\| \leq K \|v_1\| \|v_2\| \dots \|v_n\|.$$

Et c'est le cas si les ev E_1, E_2, \dots, E_n sont de dimensions finies.

EXEMPLE 42 —

1. Si on munit un \mathbb{R} -ev E (de dimension finie ou infinie) d'un produit scalaire, alors ce produit scalaire est continu de E^2 vers \mathbb{R} car il est bilinéaire et $\forall (u, v) \in E^2$, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. La multiplication de deux matrices

$$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), \quad (A, B) \mapsto A \cdot B$$

est bilinéaire, donc continue car les ev $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ sont de dimensions finies.

3. Si \mathcal{B} est une base d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n , alors le déterminant

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

est continu car il est multilinéaire et l'ev E est de dimension finie.

XI.9 NORME SUBORDONNÉE

- REMARQUE 43 — 1. L'ensemble des applications linéaires d'un ev E vers un ev F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. Cet ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un ev, c'est aussi un anneau (pour les lois $+$ et \circ), c'est même une algèbre (annexe A).
2. Si on munit chacun des ev E et F d'une norme, alors une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ peut être ou ne pas être continue (exercice 38). On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de l'evn E vers l'evn F qui sont continues. L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E, F)$.
3. Si l'evn E est de dimension finie, les ensembles $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}_c(E, F)$ sont égaux (théorème 39).

PROPOSITION-DÉFINITION 44

Soient E et F deux evn. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ une application linéaire continue de E vers F .

- (i) On appelle **norme subordonnée** (ou norme d'opérateur) de f et on note $\|f\|$ le plus petit réel K tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq K \cdot \|x\|$. Il vaut

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|.$$

- (ii) La norme subordonnée est une norme sur l'ev $\mathcal{L}_c(E, F)$. Et cette norme est **sous-multiplicative**, i.e.

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \|f \circ g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Preuve —

- (i) D'après le théorème 37, si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, alors il existe un réel K tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq K\|x\|$. Par suite, pour tout $x \neq 0_E$, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \left\| f \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|$ est majoré. Et le plus petit majorant est donc égal aux deux sup.
- (ii) Soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On vérifie les trois axiomes de la définition 1 :
- Soit $x \in E$. Si $\|f\| = 0$, alors $\|f(x)\| \leq 0\|x\| = 0$. D'où $f(x) = 0$. C'est vrai pour tout $x \in E$, donc $f = 0$.
 - Soit $\alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha f\| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha f(x)\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = |\alpha| \|f\|$.
 - Soit $x \in E : \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|\|x\| + \|g\|\|x\| \leq (\|f\| + \|g\|)\|x\|$. Or $\|f + g\|$ est le plus petit réel vérifiant cette inégalité, il est donc inférieur à $\|f\| + \|g\|$.

Et cette norme est sous-multiplicative car : $\forall x \in E, \|f \circ g(x)\| = \|f(g(x))\| \leq \|f\| \cdot \|g(x)\| \leq \|f\| \cdot \|g\| \|x\|$.

Or $\|f \circ g\|$ est le plus petit réel vérifiant cette propriété, il est donc inférieur à $\|f\| \cdot \|g\|$.

□

Les définition, notation et propriétés sont les mêmes si on remplace une application linéaire continue f par une matrice A .

EXEMPLE 45 — On munit l'ev $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ de la norme définie par : $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ pour tout vecteur colonne $X = (x_j)_{j \in [1, n]}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ une matrice carrée :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), \quad \|AX\|_\infty \leq K \cdot \|X\|_\infty, \quad \text{avec } K = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Preuve — $\|AX\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$. Or $\forall i \in [1, n], \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|X\|_\infty \leq K \cdot \|X\|_\infty$ □

Ce réel K est le plus petit qui vérifie cette inégalité car $\exists X \neq 0, \|AX\|_\infty = K \cdot \|X\|_\infty$.

Preuve — Il existe une ligne $k \in [1, n]$ telle que $K = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$. Pour chaque $j \in [1, n]$, posons $x_j = +1$ si $a_{kj} > 0$ et $x_j = -1$ si $a_{kj} \leq 0$. Pour ce vecteur X , d'une part $\|AX\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = K$ et d'autre part $\|X\|_\infty = 1$. Donc $\|AX\|_\infty = K \cdot \|X\|_\infty$.

□

On en déduit que
$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

EXERCICE 46 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ev $E = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour toutes matrices M et H de E ,

$$\|(M + H)^k - M^k\| \leq (\|M\| + \|H\|)^k - \|M\|^k.$$

Qu'en déduire ?

XI.10 OUVERTS ET FERMÉS

DÉFINITION 47

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé. On dit que :

1. un point $a \in E$ est **intérieur à A** si $\exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset A$.
2. A est un **ouvert** ou une partie ouverte de E si $\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset A$;
3. A est un **fermé** ou une partie fermée de E si son complémentaire $E \setminus A$ est un ouvert de E .

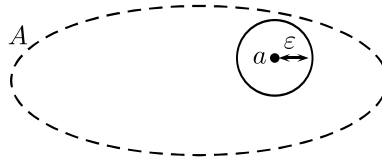


FIGURE XI.5 — A EST UN OUVERT DE $E \iff$ TOUT POINT a DE A EST INTÉRIEUR À A .

REMARQUE 48 — 1. L'intersection d'une famille d'ouverts n'est pas toujours un ouvert.

Voici un contre-exemple : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}[= \{0\}$.

2. L'union d'une famille de fermés n'est pas toujours un fermé.

Voici un contre-exemple : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] =]-1, +1[$.

3. La réunion d'une famille d'ouverts est toujours un ouvert. L'intersection d'une famille de fermés est toujours un fermé.

Preuve — Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. On veut montrer que l'union $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est un ouvert. Soit $x \in A$. Alors x appartient à au moins un A_i . Or cet A_i est un ouvert. D'où il existe une boule $B(x, \varepsilon) \subset A_i$. D'où $B(x, \varepsilon) \subset A$. Donc A est un ouvert. Pour l'intersection des fermés, on passe au complémentaire... □

4. L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert. L'union d'une famille finie de fermés est un fermé.

Preuve — Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts A_i . On veut montrer que l'intersection $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ est un ouvert. Soit $x \in A$. Alors x appartient à chaque A_i . Or chaque A_i est un ouvert, d'où il existe une boule $B(x, \varepsilon_i) \subset A_i$. Soit $\varepsilon = \min_{i \in I} \varepsilon_i$. Alors $\varepsilon > 0$ car I est fini. Et $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans chaque A_i , d'où $B(x, \varepsilon) \subset A$. Donc A est un ouvert.

Pour l'union finie des fermés, on passe au complémentaire... □

EXERCICE 49 — Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que :

1. les intervalles $] -\infty, b[$, $]a, b[$ et $]a, +\infty[$ sont des ouverts de \mathbb{R} ;
2. les intervalles $] -\infty, b]$, $[a, b]$ et $[a, +\infty[$ sont des fermés de \mathbb{R} ;
3. l'intervalle $[a, b[$ n'est ni ouvert ni fermé.

PROPOSITION 50

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit une application $f : E \rightarrow F$, $x \mapsto f(x)$ continue.

Si B est un ouvert (respectivement un fermé) de F , alors $f^{-1}(B)$ est un ouvert (respectivement un fermé) de E .

Autrement dit : l'image réciproque d'un ouvert (respectivement d'un fermé) par une application continue est un ouvert (respectivement un fermé).

Preuve — Soit $a \in f^{-1}(B)$. Alors $f(a) \in B$.

Or B est un ouvert de F , d'où $\exists \varepsilon > 0$, $B(f(a), \varepsilon) \subset B$.

Or f est continue, d'où $\exists \delta > 0$, $\|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

D'où $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B)$. Donc $f^{-1}(B)$ est un ouvert de E .

De même pour un fermé en utilisant $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$: l'image réciproque du complémentaire est égale au complémentaire de l'image réciproque. \square

EXERCICE 51 — Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue d'un evn E vers \mathbb{R} . Montrer que :

1. l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est un ouvert de E ;
2. l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est un fermé de E ;
3. l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est un fermé de E .

EXEMPLE 52 — Soit E un evn. Toute boule ouverte est un ouvert, toute boule fermée est un fermé et toute sphère est un fermé.

Preuve — La boule $B(a, R)$ centrée en $a \in E$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\|x - a\| < R$ qui équivaut à $R - \|x - a\| > 0$. Or la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto R - \|x - a\|$ est continue, donc $B(a, R) = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .

De même, $\bar{B}(a, R) = \{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E .

De même, $S(a, R) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un fermé de E . \square

EXERCICE 53 — Soit E un evn de dimension finie. Montrer que tout hyperplan de E est un fermé.

PROPOSITION 54

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E .

1. Son adhérence \bar{A} est un fermé de E .
2. A est un fermé de E ssi $A = \bar{A}$.
3. (caractérisation séquentielle d'un fermé) A est un fermé de E si, et seulement si, à chaque fois qu'une suite (u_n) d'éléments de A converge, la limite de (u_n) appartient à A .

Preuve —

1. On veut montrer que $E \setminus \bar{A}$ est un ouvert de E . Soit $x \in E \setminus \bar{A}$. Alors il existe une boule $B(x, \varepsilon)$ telle que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Chaque vecteur de cette boule $B(x, \varepsilon)$ appartient aussi à $E \setminus \bar{A}$. D'où $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus \bar{A}$. Donc $E \setminus \bar{A}$ est un ouvert de E .
2. Si $A = \bar{A}$, alors A est un fermé car \bar{A} est un fermé. Réciproquement : supposons que A est un fermé (alors $E \setminus A$ est un ouvert). On veut montrer que $\bar{A} \subset A$.

Soit $x \in \bar{A}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. D'où $x \notin E \setminus A$. (Par l'absurde : si $x \in E \setminus A$ alors il existe une boule $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus A$ car $E \setminus A$ est un ouvert.) D'où $x \in A$. Donc $\bar{A} \subset A$.

3. Utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence (proposition 23). \square