Colle 12 Produits scalaires

CAROFF Valentin

Exercice 1. Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ on définit le produit scalaire

$$\forall f, g \in E, < f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

1. Montrer qu'il existe une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n \text{ et } \forall m, n \in \mathbb{N}, < P_m, P_n >= \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On fixe n dans $\mathbb{N}$. Montrer que le polynôme P_n admet exactement n racines distinctes dans l'intervalles $]0, 1[$ que l'on énumère : $\omega_1, \dots, \omega_n$.
3. On pose, pour tout $f \in E$,

$$E(f) = \int_0^1 f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\omega_k)$$

   avec les λ_k réels à déterminer. Montrer qu'il est possible de choisir les λ_k de manière à ce que, pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n, on ait $E(P) = 0$.
   Hint : on pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange appliqués au système de racines.
4. Pour les λ_k choisis ci-dessus, montrer que l'on a en fait $E(P) = 0$ pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à $2n$. On pourra faire une division euclidienne de P par P_n.
5. Que se passe-t-il si P est de degré $2n$?

Solution **1.**

1. *Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique* $(1, X, \cdots, X^n)$ *de* $\mathbb{R}_n[X]$ *nous donne l'existence d'une famille* $(P_0, \cdots, P_n)$ *telle que pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k \in \mathrm{Vect}(1, \cdots, X^k)$. *Ce qui est exactement ce que l'on nous demandait.*
2. *On en déduit que pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^{\perp}$.
Supposons que P_n *possède r racines de multiplicité impaires* α_1, ...,$\alpha_r \in]0, 1[$. *Alors* $\displaystyle\int_0^1 P_k(t)\prod_{i=1}^{r}(t-\alpha_i)\,dt =< P_k, \prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i) = 0$ *si* $r < k$. *Mais par construction* $P_k \prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)$ *est de signe constant. Ce qui est absurde, car* $P_k \neq 0$. *Donc* $r = k$ *et* P_k *est simplent scindé dans* $]-1, 1[$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.
3. *Soit* L_i *le i-ème polynôme interpolateur de Lagrange associè à* $(w_1, \cdots, w_n)$. *Alors tout olynôme P de degré strictement inférieur à n s'écrit dans la base* L_i *:*
$$P = \sum_{i=1}^{n} P(w_i)L_i$$
et donc si $\lambda_k = \displaystyle\int_0^1 L_k(t)\,dt$, *on obtient la formule attendue.*
4. *Si* $\deg P < 2n$, *alors on fait la division de P par* P_n *:* $P = Q_nP_n + R_n$, *avec* $deq R_n < n$.
On en déduit que $< P, 1 >=< P_n, Q_n > + < R_n, 1 >= \displaystyle\int_0^1 R_n(t)\,dt$.
De plus, $R_(w_i) = P(w_i)$ *e donc*
$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\omega_k).$$
Si $\deg p = 2n$, *on reprend la division euclideinne* $P = Q_nP_n + R_n$. *Si* α_n *est le coefficient dominant de* P_n *et si* a_{2n} *est le coefficient dominant de P, alors*
$$Q_n = \frac{a_{2n}}{\alpha_n}P_n + \textit{terme de degré} < n$$
et donc $< Q_n, P_n >= \dfrac{a_{2n}}{\alpha_n}\|P_n\|^2$.
Ainsi,
$$\int_0^1 P(t)\,dt = \frac{a_{2n}}{\alpha_n}\|P_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(\omega_k).$$

HAMON Arthur

<u>Exercice 2.</u> Soit L une forme linéaire sur $\mathbb{C}[X]$. On dit qu'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ est orthogonale par rapport à L si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n,\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \neq n \Rightarrow L(P_m P_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ L(P_n^2) \neq 0.$$

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale par rapport à L.
   i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $L(P_n P) = 0$.
   ii) Soit $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $S \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $\deg R$, $L(RS) = 0$. Montrer que $R = 0$.
   iii) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes unitaires orthogonale relativement à L.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mu_k = L(X^k)$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix}$. On suppose qu'il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale pour L.
   i) Montrer que $\Delta_n \neq 0$.
   ii) Établir la réciproque et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de P_n est égal à $L(X^n P_n)\Delta_{n-1}/\Delta_n$.

Solution **2.** $(P,Q)\mapsto L(P,Q)$ *est une forme bilinéaire symétrique. On dira que P et Q sont orthogonaux si $L(PQ)=0$.*

1. *(i) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille (P_0,P_n) est échelonnée en degré et donc est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Comme par hypothèse, P_n est orthogonale à une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on en déduit que P_n est orthogonal à tout polynôme de degré au plus $n-1$.*

   (ii) Si R de degré $d\geq 0$, R s'écrit $\sum_{i=0}^{d}\alpha_i P_i$. Mais alors $L(RP_d)=0$, et donc $\alpha_d=0$, ce qui contredit R de degré $d\geq 0$. Donc $R=0$.

   (iii) Quitte à diviser P_n par son coeffcient dominant, on peut supposer la suite (P_n) unitaire orthogonale. S'il en exsite une seconde, alors (P_n-Q_n) est encore orthogonale à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et est de degré $n-1$, ce qui montre que $P_n=Q_n$.

2. *On remarque que la matrice proposée s'écrit $A_n=\left(L(X^iX^j)\right)_{0\leq i,j\leq n}$, c'est-à-dire est la matrice dans la base canonique L restreinte à $\mathbb{R}_n[X]^2$:*

$$L(P,Q)=\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}^T A_n\begin{pmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix},$$

   avec $P=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ et $Q=\sum_{i=0}^{n}b_iX^i$.
   Si le noyau de A était non nulle, on obtiendrait un polynôme orthogonal à tous les autres, mais on a montré que seul le polynôme nul convient, donc on a obtenu l'exsitence.

   Réciproquement, si le déterminant est non nul, alors pour tout polynôme $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ de degré d, $L(PP)=\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_d\end{pmatrix}A_d\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_d\end{pmatrix}\neq 0$.
   L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à partir de la famille $(1,X,\cdots,X^n,\cdots)$ donne la famille P_n : on pose

$$P_{n+1}=X^{n+1}-\frac{L(X^nP_{n-1})}{L(P_{n-1}^2)}P_{n-1}-\cdots-\frac{L(X^nP_0)}{L(P_0^2)}.$$

   De plus, si $P_n=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, alors pour tout $k\in[\![0,n]\!]$

$$L(P_nX^k)=\sum_{i=0}^{n}a_iL(X^{i+k})=\delta_{n,k}L(X^nP_n)$$

   On en déduit qu'en remplaçant la dernière colonne C_n de la matrice par $\sum_{k=0}^{n}a_kC_k$ on obtient

$$a_n\Delta_n=\begin{vmatrix}\mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} & L(1\times P_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mu_{n-1} & \dots & \mu_{2n-2} & L(X^{n-1}P_n)\\ \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} & L(X^nP_n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mu_{n-1} & \dots & \mu_{2n-2} & 0\\ \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} & L(X^nP_n)\end{vmatrix}=L(X^nP_n)\Delta_{n-1}$$

MOREL Jules

Exercice 3. Soient $(E, (\ |\ ))$ un R-espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geq 1$ et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires sur E.

1. Quelle est la dimension de E^* ?
2. Montrer que si $\varphi \in E^*$, alors il existe un unique vecteur $a \in E$, tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = (a|x)$.
3. Soit $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ une famille de E^*. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $a_i \in E$ l'unique vecteur a_i tel que $\varphi(x) = (a_i|x)$ et soit $f : E \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x))$.
   (a) Montrer que $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ est une base de E ssi $(a_1, \cdots, a_n)$ est une base de E.
   (b) Si $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que :
   $$\forall (i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2,\ \phi_i(e_j) = \delta_{i,j}.$$
4. Si ϕ_1 , $\phi_2 \in E^*$, on définit l'application $\phi_1 \wedge \phi_2 : (x, y) \mapsto \phi_1(x)\phi_2(y) - \phi_1(y)\phi_2(x)$. Montrer que $\phi_1 \wedge \phi_2$ est une forme bilinéaire antisymétrique.
5. Si $(\phi_1, \cdots, \phi_p)$ est une famille libre de E^*, montrer que la famille $(\phi_i \wedge \phi_j)_{1 \leq i < j \leq p}$ est libre.

Solution **3.**

1. *L'espace E^* est défini par $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Puisque E est de dimension finie n, on a :*
   $$\dim(E^*) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n \times 1 = n.$$
2. *Soit l'application $\Theta : E \to E^*$ définie par $\Theta(a) = \varphi_a$ où $\forall x \in E, \varphi_a(x) = (a|x)$.*
   - ***Linéarité :*** *L'application est linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire.*
   $$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in E^2, \quad \Theta(\lambda a + b) = \lambda \Theta(a) + \Theta(b).$$
   - ***Injectivité :*** *Soit $a \in \ker(\Theta)$. Alors pour tout $x \in E$, $(a|x) = 0$. En particulier pour $x = a$, on a $(a|a) = \|a\|^2 = 0$, donc $a = 0_E$. Ainsi $\ker(\Theta) = \{0_E\}$.*
   - ***Bijectivité :*** *Θ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie n. Elle est donc bijective.*

   Conclusion : *Pour tout $\varphi \in E^*$, il existe un unique vecteur $a = \Theta^{-1}(\varphi)$ tel que $\forall x \in E, \varphi(x) = (a|x)$.*
3. *L'application Θ étant un isomorphisme de E vers E^*, elle transforme toute base de l'espace de départ en une base de l'espace d'arrivée.*

(a) *Si $(a_i)_i$ est une base de E, alors $(\Theta(a_i))_i = (\phi_i)_i$ est une base de E^*.*
Réciproquement, si $(\phi_i)_i$ est une base de E^*, alors $(\Theta^{-1}(\phi_i))_i = (a_i)_i$ est une base de E.
Ainsi, $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ est une base de E^* si et seulement si $(a_1, \ldots, a_n)$ est une base de E.

(b) *Supposons que $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ soit une base de E^*. Considérons l'application linéaire :*

$$\begin{aligned} \Psi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)) \end{aligned}$$

Injectivité : *Si $\Psi(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!], \phi_i(x) = 0$. Avec les notations de la question précédente, x serait orthogonal à la base $(a_1, \cdots, a_n)$. Donc $x = 0_E$.*
Bijectivité : *Ψ est injective entre deux espaces de même dimension n, donc bijective.*
Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ par $e_j = \Psi^{-1}(\varepsilon_j)$. Par construction, $\Psi(e_j) = \varepsilon_j$, ce qui signifie exactement :

$$\forall i, \phi_i(e_j) = (\varepsilon_j)_i = \delta_{i,j}.$$

L'image réciproque d'une base par un isomorphisme étant une base, $(e_1, \ldots, e_n)$ est bien une base de E.

(c) *Facile*

4. *Soit $(\phi_1, \ldots, \phi_p)$ une famille libre de E^*. D'après le résultat de la question 3.b (appliqué au sous-espace engendré ou en complétant la famille en une base de E^*), il existe une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ de E telle que $\phi_i(e_j) = \delta_{i,j}$.*
Soient des scalaires $(\lambda_{i,j})_{1 \le i < j \le p}$ tels que :

$$\sum_{1 \le i < j \le p} \lambda_{i,j}(\phi_i \wedge \phi_j) = 0.$$

Évaluons cette somme sur un couple de vecteurs (e_k, e_l) avec $1 \le k < l \le p$.

$$\sum_{1 \le i < j \le p} \lambda_{i,j} \left(\phi_i(e_k)\phi_j(e_l) - \phi_i(e_l)\phi_j(e_k)\right) = 0.$$

Or, $\phi_u(e_v) = \delta_{u,v}$.
- *Le terme $\phi_i(e_k)\phi_j(e_l)$ est non nul (et vaut 1) si et seulement si $i = k$ et $j = l$.*
- *Le terme $\phi_i(e_l)\phi_j(e_k)$ est non nul (et vaut 1) si et seulement si $i = l$ et $j = k$.*

Dans la somme, les indices vérifient la condition stricte $i < j$. Puisque nous avons choisi $k < l$, le couple $(i, j) = (k, l)$ apparait dans la somme, mais le couple $(i, j) = (l, k)$ n'y apparait pas.
Il ne reste donc que le terme correspondant à $i = k$ et $j = l$:

$$\lambda_{k,l} \times (1 \times 1 - 0) = 0 \implies \lambda_{k,l} = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout couple (k, l) tel que $k < l$, la famille est libre.