

K D O D U 1 2 / 0 1 / 2 0 2 6

Séries entières

Ce problème est extrait de CCP - MP - 2005 et
contient une preuve du théorème d'Abel radial.

Notations

- Dans tout le problème, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
- On note f , la somme de cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes :

$(\mathcal{P}_1)$: la série numérique $\sum a_n$ converge.

$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Objectif

On cherche à prouver le **théorème d'Abel radial** qui affirme que, si la série numérique $\sum a_n$ converge, alors $f(x)$ admet une limite finie égale à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Généralités

1. En utilisant les développements en série entière usuels, donner dans chacun des cas suivants, en le justifiant, un exemple de suite (a_n) telle que :
 - (a) (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
 - (b) (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$.
 - (c) (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$.
 - (d) la série entière $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$.
2. On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente. Montrer (sans utiliser le théorème radial d'Abel...) que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

3. Exemple

Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Preuve du théorème d'Abel radial

4. On suppose dans cette question que la série numérique $\sum a_n$ converge et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, 1], \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

(a) Justifier que, pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x)$ est bien défini. Puis, pour tout $x \in [0, 1]$, comparer $R_n(x)$ et la somme :

$$\sum_{p=1}^{\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1} (x-1) \sum_{p=1}^{\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

(c) Soit ε , un réel strictement positif. Justifier l'existence d'un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$: $\forall p \in \mathbb{N}, \quad |r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. En déduire que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\forall x \in [0, 1[, \quad |R_n(x)| \leq \varepsilon$$

(d) Conclure que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

5. Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$?

Réciproque du théorème d'Abel radial ?

6. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel radial est fautive. (*On pourra utiliser la question 1.*)

On cherche à ajouter une condition (Q) à la condition (P_2) de sorte que si (a_n) vérifie (P_2) et (Q) , alors elle vérifie (P_1) .

7. On prend pour (Q) la propriété : pour tout entier naturel n , $a_n \geq 0$.

Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés (P_2) et (Q) , alors elle vérifie la propriété (P_1) .

(*On pourra montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.)*)

N.B. Si on prenait pour (Q) la propriété : la suite (a_n) vérifie $a_n = O(\frac{1}{n})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtiendrait le :

THÉORÈME DE LITTLEWOOD — Si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $a_n = O(\frac{1}{n})$, alors la série $\sum a_n$ converge.