

CORRIGÉ DU KDO DU 12 / 01 / 2026

Séries entières

9 janvier 2026

Généralités

1. (a) Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge d'après le théorème des séries alternées et $\ln(1+x)$ admet une limite

finie en 1^- égale à $\ln 2$. Donc

la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n \geq 1}$ convient

- (b) Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

$\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge grossièrement et $\frac{1}{1+x}$ admet une limite finie en 1^- égale à $\frac{1}{2}$.

Donc

la suite $((-1)^n)_{n \geq 0}$ convient

- (c) Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

La série $\sum_{n \geq 0} 1$ diverge grossièrement et $\frac{1}{1-x}$ tend vers $+\infty$ en 1^- . Donc

la suite $(1)_{n \geq 0}$ convient

- (d) Il suffit de considérer la série précédente. Comme $\sup_{-1 < x < 1} |x^n| = 1 \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément vers 0, ce qui implique que la série $\sum x^n$ ne converge

pas uniformément sur $] -1, 1[$. Donc

la suite $(1)_{n \geq 0}$ convient

2. Comme $\sup_{-1 < x < 1} |a_n x^n| = |a_n|$ et que $\sum |a_n|$ converge, la série entière converge normalement donc uniformément sur $] -1, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} a_n$. Par double limite,

$f(x)$ admet une limite finie en 1^- égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Autre méthode : Comme $\sup_{-1 \leq x \leq 1} |a_n x^n| = |a_n|$ et que $\sum |a_n|$ converge, la série entière converge normalement donc uniformément sur $[-1, 1]$. La somme f de la série entière est alors définie et continue sur $[-1, 1]$, ce qui implique que $f(x)$ tend vers $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, quand x tend vers 1^- .

3. Pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Les séries entières $\sum \frac{(-x)^n}{n(n-1)}$, $\sum \frac{(-x)^n}{n-1}$ et $\sum \frac{(-x)^n}{n}$ sont de rayon de convergence 1 donc, pour tout $x \in]-1, 1[$, on peut écrire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x \ln(1+x) + [\ln(1+x) - x]$$

Comme la série $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ est absolument convergente, la question précédente donne

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2 \ln 2 - 1$$

Preuve du théorème d'Abel radial

4. (a) Soit $x \in [0, 1]$. Si $x < 1$, comme la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon 1, la série numérique $\sum a_n x^n$ est absolument convergente et son reste $R_n(x)$ d'ordre n est donc bien défini. Si $x = 1$, comme la série $\sum a_n$ converge, son reste $R_n(1)$ est également bien défini. Dans tous les cas,

$R_n(x)$ et bien défini.

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$, par conséquent

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = R_n(x)$$

- (b) Soient $k > 1$ et $x \in [0, 1[$. Alors $\sum_{p=1}^k (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = \sum_{p=1}^k r_{n+p-1} x^{n+p} - \sum_{p=1}^k r_{n+p} x^{n+p}$.

Après mise à l'écart du premier terme de la première somme et réindexation des autres, on obtient :

$$\sum_{p=1}^k (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = r_n x^{n+1} + x^{n+1} (x-1) \sum_{p=1}^{k-1} r_{n+p} x^{p-1} - r_{n+k} x^{n+k}$$

Le dernier terme tend vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$ car $r_{n+k} \rightarrow 0$, puisque la série $\sum a_n$ converge, et $|x^{n+k}| \leq 1$.

Il suffit donc de faire tendre k vers $+\infty$ pour obtenir la relation voulue.

On a obtenu :

$$\text{pour tout } x \in [0, 1[, R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1} (x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$$

- (c) Comme on l'a déjà signalé, le reste r_n tend vers 0, par conséquent, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, on dispose d'un entier n_0 tel que, pour tout $k \geq n_0$, on ait $|r_k| \leq \varepsilon/2$. Alors, on a bien $|r_{n+p}| \leq \varepsilon/2$, pour $n \geq n_0$ et $p \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in [0, 1[$ et $n \geq n_0$, on obtient, par inégalité triangulaire :

$$|R_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \frac{1}{1-x} = \varepsilon$$

On conclut que,

$$\text{pour tous } n \geq n_0 \text{ et } x \in [0, 1[, |R_n(x)| \leq \varepsilon$$

(d) La question précédente prouve la convergence uniforme de la série entière sur $[0, 1[$, et permet de

conclure, par double limite, que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Par contraposition, si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, la série $\sum a_n$ est divergente.

Réciproque du théorème d'Abel ?

6. La question 1 - 1) b) fournit un contre-exemple. La réciproque du théorème d'Abel radial est fausse.

7. Puisque les coefficients sont positifs, $\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq f(x)$, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme la fonction f est croissante sur $[0, 1[$ on a $f(x) \leq \lim_{1^-} f$, pour tout $x \in [0, 1[$.

Par transitivité de la relation d'ordre, on en déduit que $\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq \lim_{1^-} f$, pour tout $x \in [0, 1[$.

En faisant tendre x vers 1^- dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes

partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$. Par conséquent, la série $\sum a_n$ est convergente.