Corrigé de la colle n° 12

Produits scalaires

12 janvier 2026

Exercice 1. On munit l'*ev* $E = \mathcal{C}\left([-1,1], \mathbb{R}\right)$ du produit scalaire défini par

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Les *sev*
$$F = \{f \in E \mid \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\} \text{ et } G = \{g \in E \mid \forall t \in [0,1], g(t) = 0\}.$$
sont-ils orthogonaux ? supplémentaires ?
2. $F^\perp$ est-il égal à G ? $(F^\perp)^\perp$ est-il égal à F ?

---

1. Par construction, pour tout $(f,g) \in F \times G$, $f(t)g(t) = 0$ pout tout $t \in [-1,+1]$, d'où $\langle f, g\rangle = 0$. Les *sev* F et G sont donc orthogonaux mails ils ne sont pas supplémentaires car leur somme $F + G$ n'est pas égale à E car la fonction constante 1 appartient à E mais pas à $F + G$ car elle ne s'annule pas en 0.
2. De $F \perp G$, on déduit que $G \subset F^\perp$ ▷ **proposition 17 du chapitre VIII**. Reste à prouver l'inclusion $F^\perp \subset G$: soit $g \in F^\perp$. Alors $\langle f, g\rangle = 0$ pour tout $f \in F$.

   Soit , en particulier, $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-1,0] \\ tg(t) \text{ sinon} \end{cases}$ (c'est la même idée que dans ▷ **l'exo 8 du TD n° 8**). Par construction, $f \in F$ car $f(t) = 0$ si $t \in [-1,0]$ et la fonction f est continue sur $[-1,+1]$ car c'est le produit des deux fonctions g et $t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-1,0] \\ t \text{ sinon} \end{cases}$ qui sont bien continues.

   De $0 = \langle f, g\rangle = \int_0^1 tg^2(t)\,dt = 0$, on déduit que $\forall t \in [0,1],\ tg^2(t) = 0$ d'après le théorème de l'intégrale nulle car la fonction $[0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto tg^2(t)$ est continue et positive. D'où $\forall t \in]0,1],\ g(t) = 0$. Et le réel $g(0)$ est aussi nul par continuité de la fonction g. D'où $g \in G$.

   Donc $F^\perp$ est inclus dans G et finalement égal à G. De même que $F^\perp = G$, on peut prouver que $G^\perp = F$. Donc $(F^\perp)^\perp = F$.

Remarque – Un exemple de *sev* F d'un espace préhilibertien E tel que :

— F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ est donné par cet exo ;

— F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires et $\left(F^\perp\right)^\perp \neq F$ est donné par ▷ **l'exo 7 du TD n° 8**.

Dans le chapitre VIII, le corollaire 23 montre que : si F et $F^\perp$ sont supplémentaires, alors $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Exercice 2.

1. Montrer que
$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi/2} f(t)g(t)\,dt + \int_0^{\pi/2} f'(t)g'(t)\,dt$$
définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^1([0,\pi/2])$.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels
$$F = \{f \in \mathcal{C}^2([0,\pi/2]) \mid f'' - f = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = 0\}$$
sont orthogonaux.

3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel F et montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires.
4. Soient deux réels α et β. Soit $E(\alpha,\beta) = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(\pi/2) = \beta\}$. Montrer que toutes les fonctions de $E(\alpha,\beta)$ ont le même projeté orthogonal sur F. Quel est-il ? En déduire

$$\inf_{f\in E(\alpha,\beta)} \int_0^{\pi/2} \left([f(t)]^2 + [f'(t)]^2\right) dt.$$

---

1. La forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique, bilinéaire et positive. Elle est aussi définie car

$$\langle f, f\rangle = 0 \implies \int_0^{\pi/2} f^2(t)\,dt = 0 \implies \forall t \in [-1,1], f(t) = 0$$

d'après le théorème de l'intégrale nulle car la fonction $t \mapsto f^2(t)$ est positive et continue.
2. Soit $(f,g) \in F \times G$: alors $\langle f,g\rangle = \int_0^{\pi/2} fg + \int_0^{\pi/2} f'g' = 0$ car les fonctions f' et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, d'où, en intégrant par parties, $\int_0^{\pi/2} f'g' = [f'g]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f''g$. Or $f'' = -f$ car $f \in F$ et $[f'g]_0^{\pi/2} = 0$ car $g \in G$.
3. Les deux fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ forment une base de l'*ev* F des solutions de l'équation différentielle $f'' - f = 0$ linéaire d'ordre 2 sans second membre. Montrons que les *sev* F et G sont supplémentaires dans E, par analyse-synthèse.

   Analyse – Soit $h \in E$. Si $(f,g) \in F \times G$ et $h = f + g$, alors $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in [0,\pi/2]$, $f(t) = a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{-t}$. Or $h(0) = f(0)$ et $h(\pi/2) = f(\pi/2)$, d'où (a,b) est l'unique solution du système $(*)$ $\begin{cases} a + b = h(0) \\ a\mathrm{e}^{\pi/2} + b\mathrm{e}^{-\pi/2} = h(\pi/2)\end{cases}$. Et $g = h - f$. D'où l'unicité de f et de g.

   Synthèse – Soit $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{-t}$, où (a,b) est l'unique solution du système $(*)$. Soit $g = h - f$. Alors $f \in F$, $g \in G$ et $f + g = h$, d'où l'existence de f et de g.

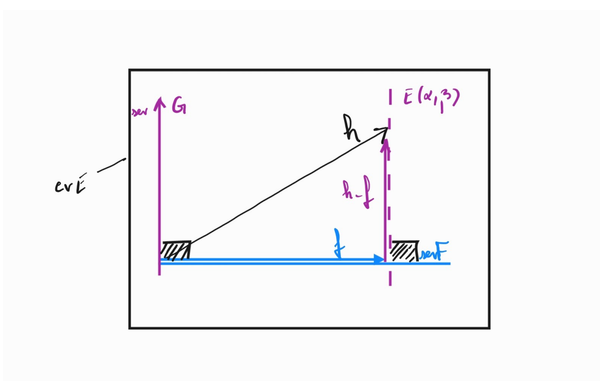

Figure 1 –

4. Soit (a,b) l'unique solution du système $\begin{cases} a + b = \alpha \\ a\mathrm{e}^{\pi/2} + b\mathrm{e}^{-\pi/2} = \beta\end{cases}$. La fonction $f : t \mapsto a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{-t}$ appartient à $F \cap E(\alpha,\beta)$ (voir la figure 1). Et, pour toute fonction $h \in E(\alpha,\beta)$, $h - f \in G$ car $\begin{cases} h(0) - f(0) = \alpha - \alpha = 0 \\ h(\pi/2) - f(\pi/2) = \beta - \beta = 0\end{cases}$. D'où f est le projeté orthogonal de toutes les fonctions $h \in E(\alpha,\beta)$. Donc $\inf_{h\in E(\alpha,\beta)} \int_0^{\pi/2} \left([h(t)]^2 + [h'(t)]^2\right) d = \|f\|^2$.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien, u un vecteur de E tel que $||u|| = 1$.
Pour chaque réel α, on définit l'endomorphisme φ_α par :

$$\forall x \in E,\ \varphi_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, u\rangle u.$$

1. Interpréter géométriquement les endomorphismes φ_{-1} et φ_{-2}.
2. Calculer $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$ pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer un polynôme annulateur de l'endomorphisme φ_α.

4. Pour quelles valeurs du réel α l'endomorphisme φ_α est-il bijectif ?
5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme φ_α. Est-il diagonalisable ?

---

1. L'endomorphisme $f\,:\,E \to, E,\ x \mapsto \langle x, u\rangle u$ est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(u)$ car le vecteur u est de norme 1. Posons $p = \varphi_{-1}$ et $F = [\mathrm{Vect}(u)]^\perp$ (voir la figure 2). Alors $p = \mathrm{id}_E - f$, donc φ_{-1} est le projecteur sur l'hyperplan F parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(u)$. Posons $s = \varphi_{-2}$. Alors $\mathrm{id}_E + s = 2p$, donc s est la symétrie par rapport à l'hyperplan F parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(u)$.

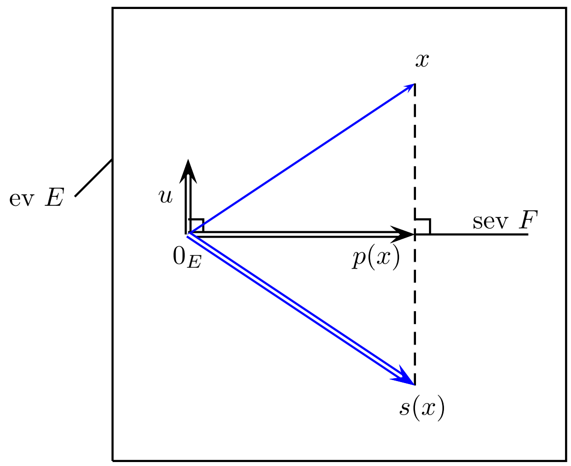

FIGURE 2 –

2. Soit $x \in E$:
$$\begin{aligned}\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta(x) &= \varphi_\beta(x) + \alpha\langle \varphi_\beta(x), u\rangle u = x + \beta\langle x, u\rangle u + \alpha\langle x + \beta\langle x, u\rangle u, u\rangle u = x + \beta\langle x, u\rangle u + \alpha\langle x, u\rangle u + \alpha\beta\langle x, u\rangle\langle u, u\rangle u\\ &= x + \beta\langle x, u\rangle u + \alpha\langle x, u\rangle u + \alpha\beta\langle x, u\rangle u = x + (\alpha+\beta+\alpha\beta)\langle x, u\rangle u = \varphi_{\alpha+\beta+\alpha\beta}(x).\end{aligned}$$
3. En reprenant le calcul précédent dans le cas particulier où $\alpha = \beta$, on trouve :
$$\forall x \in E,\ \varphi_\alpha^2(x) = (2+\alpha)\varphi_\alpha(x) - (1+\alpha)x.$$
D'où $\varphi_\alpha^2 = (2+\alpha)\varphi_\alpha - (1+\alpha)\mathrm{id}_E$. Donc, le polynôme $X^2 - (2+\alpha)X + (1+\alpha)$ est annulateur de φ_α.
4. Si $\alpha = -1$, alors φ_{-1} est le projecteur sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(u)$, donc n'est pas bijectif car son noyau est $\mathrm{Vect}(u)$.

   Sinon :
   — (MÉTHODE 1) le calcul de la question 2 montre que $\varphi_\alpha \circ \varphi_{-\alpha/(1+\alpha)} = \mathrm{id}_E = \varphi_{-\alpha/(1+\alpha)} \circ \varphi_\alpha$, donc que l'endo φ_α admet une réciproque, donc qu'il est bijectif ;
   — (MÉTHODE 2) du polynôme annulateur $X^2 - (2+\alpha)X + (1+\alpha) = (X-1)(X-(1+\alpha))$ trouvé à la question 3, on déduit que $\mathrm{Sp}(\varphi_\alpha) \subset \{1; 1+\alpha\}$, ce spectre ne contient pas 0, d'où l'endo est injectif et, donc bijectif car l'*ev* E est de dimension finie..
5. Soit $x,\ y \in E$. On a :
$$\begin{aligned}\langle \varphi_\alpha(x)|y\rangle &= \langle x + \alpha\langle x, u\rangle u|y\rangle\\ &= \langle x|y\rangle + \alpha\langle x, u\rangle\langle u|y\rangle\\ &= \langle x|y\rangle + \langle x, \alpha\langle u|y\rangle u\rangle\\ &= \langle x, y + \alpha\langle y|u\rangle u\rangle\\ &= \langle x, \varphi_\alpha(y)\rangle.\end{aligned}$$
6. On construit une base adaptée. Le vecteur u est un vecteur propre associé à la valeur propre $1+\alpha$. Si un vecteur x est orthogonal à u, alors $\varphi_\alpha(x) = x$. Soit $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1})$ une base de $[\mathrm{Vect}(u)]^\perp$, alors $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}, u)$ est une base de l'*ev* E car $\mathrm{Vect}(u) \oplus [\mathrm{Vect}(u)]^\perp = E$. Cette base est formée de vecteurs propres de φ_α, donc φ_α est diagonalisable et son spectre est $\{1; 1+\alpha\}$.

   Si $\alpha \neq 0$, alors $E_1 = [\mathrm{Vect}(u)]^\perp$ et $E_{1+\alpha} = \mathrm{Vect}(u)$ sont les deux *sep* de l'endo φ_α. Si $\alpha = 0$, alors $\varphi_\alpha = \mathrm{id}_E$ et $E_1 = E$ est l'unique *sep*.

   REMARQUES :

— dans le cas où $\alpha \neq 0$, le polynôme $X^2 - (2+\alpha)X + (1+\alpha) = (X-1)(X-(1+\alpha))$ est non seulement annulateur de φ_α mais aussi qu'il est scindé à racines simples, on en déduit que φ_α est alors diagonalisable ;

— du spectre, on déduit que 0 est une valeur propre de φ_α si, et seulement si, $\alpha = -1$. On retrouve ainsi que φ_α est bijectif si, et seulement si, $\alpha \neq -1$.