Colle n° 13

Séries entières

Exercice 1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ et montrer que, pour tout $x \in]-R, +R[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Exercice 2. 1. Rappeler le théorème du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes. Et celui du produit de Cauchy de deux séries entières.

2. Quel est le terme général du produit de Cauchy des séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, où $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$, pour tout $n \geqslant 1$, et $u_0 = v_0 = 0$? En déduire que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas toujours une série convergente.
3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et, pour tout entier naturel n, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
   On suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Exercice 3. 1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ converge si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$.

2. Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum \dfrac{x^n}{n^a + (-1)^n}$ est-elle convergente ? (On discutera suivant les valeurs du paramètre a.)