KDO DU 14/01/2026

La transformation d'Abel

La transformation d'Abel (hors programme) est l'analogue, dans le monde discret des séries, de l'intégration par parties, dans le monde continu des intégrales. Son corollaire 2 (lui aussi hors programme) généralise le théorème des séries alternées.

PROPOSITION 1 (**Transformation d'Abel**)

Soient deux suites a_n et b_n et les deux sommes partielles $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$: alors $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1}$.

Preuve —

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) B_k \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\
&= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1})
\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 2

Si la suite A_n est bornée et la suite B_n tend vers zéro en décroissant, alors la série $\sum a_n B_n$ converge.

Preuve — Il existe un majorant M de $|A_n|$ car la suite A_n est bornée. D'où :

1. $|A_n B_n| \leq M B_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $|A_n B_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car la suite B_n tend vers zéro ;
2. $\forall k > 0,\ |b_k| = -b_k$ car la suite B_n décroît. Et la série $\sum |b_k|$ converge car la suite B_n converge. D'où
$$\sum_{k=0}^{n-1} |A_k b_{k+1}| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |b_{k+1}| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |b_{k+1}| .$$
D'où la série $\sum A_k b_{k+1}$ converge (absolument). Donc (transformation d'Abel) la série $\sum a_k B_k$ converge.

□

Ce corollaire permet de redémontrer le théorème des séries alternées : c'est le cas particulier où $a_k = (-1)^k$. Il permet aussi de démontrer la convergence d'autres séries, comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 3 — *Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. La série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ converge absolument si $\alpha > 1$. On va montrer qu'elle converge pour tout $\alpha > 0$. Soient*

$$a_n = \cos(n\theta) \text{ et } B_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

La suite B_n tend vers zéro en décroissant. Montrons que la suite A_n est bornée :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

D'où, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|A_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}.$$

Donc (corollaire 2) la série $\sum a_n B_n$ converge.