Colle 13 Séries entières

GIBOUIN Paul

<u>Exercice 1.</u> On pose $f : x \mapsto \sum_{n\geq 1}(\ln n)x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$.

1. Déterminer les rayons de convergence de f et de g.
2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.
3. Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1,1[$.
4. Montrer que f est continue sur $[-1,1[$ et trouver des équivalents de f et g en 1.

Solution **1.**

1. *Le critère de D'Alembert montre que les rayons de convergence de ces séries est* 1 *dans les deux cas.*
2. *Sur l'intervalle* $[-1, 0]$*, la série définissant* g *est une série alternée et comme* $-\ln(1 - \frac{1}{n}) < 0$ *est décroissante et tend vers* 0*, on montre le reste* R_n *d'ordre* n *vérifie*

$$\forall x \in [-1, 0],\ |R_n| \leq |\ln(1 - \frac{1}{n+1})x^{n+1}| \leq |\ln(1 - \frac{1}{n+1})|$$

   ce qui montre que R_n *converge uniformément vers* 0 *sur* $[-1, 0]$*. La limite est donc continue sur* $[-1, 0]$*.*

3. *Remarquons que si* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ *converge sur* $]-1, 1[$*, alors*

$$(1 - x)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = a_1 + \sum_{n\geq 2}(a_n - a_{n-1})x^n$$

   Si $a_n = \ln n$*, alors* $a_1 = 0$ *et*

$$\forall n \geq 2,\ b_n = a_n - a_{n-1} = \ln(1 - \frac{1}{n})$$

   ce qui montre que $(1 - x)f(x) = g(x)$*, et* f *se prolonge par continuité en* -1*.*

4. *On a* $\ln(1 - \frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n}$*. Calculons*

$$g(x) - (\ln(1 - x) + x) = \sum_{n\geq 2}\left(\ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n})\right) x^n$$

   Mais

$$0 \geq \ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2},$$

   donc la série $\sum_{n\geq 2}\left(\ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n})\right) x^n$ *est normalmeent convergente sur* $[-1, 1]$ *et sa valeur* α *en* 1 *vérifie* $\alpha < 0$*. On en déduit que* $g(x) - \ln(1 - x) + x \sim_1 \alpha =_1 o(\ln(1 - x))$*.*
   En conclusion, $g(x) \sim_1 \ln(1 - x)$ *et* $f(x) \sim_1 \frac{\ln(1 - x)}{1 - x}$*.*

SAÏDANI Soren

Exercice 2. Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivable.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} f(\frac{1}{k})$$

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$ et F sa somme.

1. Préciser R et F dans chacun des cas suivants :
   (a) f est constante
   (b) $f : x \to (qx - 1)$ où q est un entier naturel non nul.
2. De façon générale, exprimer R à l'aide de f.
3. On suppose que $f(0) > 0$.
   Montrer que la suite u est de signe constant à partir d'un certain rang.
4. Etudier la convergence de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $0 \leq |f(0)| < 1$
   (b) $|f(0)| > 1$
5. On suppose désormais que $f(0) = 1$ et que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (a) Soit la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $v_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{n^a}$
   Montrer qu'il existe une unique valeur du réel a pour laquelle la suite v admet une limite finie et non nulle.
   Exprimer a en fonction de f'.
   (b) Donner une équivalent de u_n.
   (c) Déterminer l'ensemble de définition de F

Solution **2.**

1. (a) *Quand* $f = c \neq 0$: $R = \dfrac{1}{|c|}$ *et* $F(x) = \dfrac{1}{1-cx}$.

   (b) $R = +\infty$ *et* $F(x) = (1+x)^{q-1}$.

2. $R = +\infty$ *s'il existe* k *tel que* $f(\dfrac{1}{k}) = 0$ *et* $R = \dfrac{1}{|f(0)|}$ *sinon.*

3. *Il existe un rang* k_0 *au delà duquel* $f(\dfrac{1}{k}) > 0$

4. (a) *La suite tend vers* 0.

   (b) *La suite tend vers* $+\infty$.

5. (a) *Passer par la série* $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$: $a = f'(0)$.

$$\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{(n+1)^a}\right) - \ln\left(\frac{u_n}{n^a}\right) = \ln\left(f(1/(n+1)\right) + a(\ln n - ln(n+1))$$
$$= \frac{f'(0)}{n} - a \times \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

   Car $f(\dfrac{1}{n+1}) = f(0) + \dfrac{1}{n+1}f'(0) + O((\dfrac{1}{n^2})$, *avec* $f(0) = 1$.
   On en déduit que la série $\sum_n \ln v_{n+1} - \ln v_n$ *converge vers* α *ssi* $f'(0) = a$. *Et alors* v_n *converge vers* $L = e^l$

   (b) $u_n \sim Ln^a$.

   (c) *Le rayon est* 1 : *reste l'étude aux bornes* 1 *et* -1. *On trouve :*
   -> *Si* $a \geq 0$: $D =]-1, 1[$ *par divergence grossière.*
   -> *Si* $a < -1$: $D = [-1, 1]$ *par convergence absolue.*
   -> *Si* $-1 \leq a < 0$: $D = [-1, 1[$ *par SATP divergente (en* 1*) et Th spécial des séries alternées à partir d'un certain rang (en* -1*).*

Exercice 3.

1. (a) Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[, \;\; f^{(n)}(x) \geq 0$$

Écrire la formule de Taylor $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$ avec un reste intégrale et montrer que pour tout $x \in [0, a[$, la série de Taylor converge.

(b) Soient x et y tel que $0 < x < y < a$.

Montrer que $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$. En déduire que $\forall x \in [0, a[, \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$

2. (a) Montrer que la fonction tangente est développable en série entière sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(b) Montrer que les coefficients de ce développement $\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sont donnés par :

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

Solution **3.**

1. (a) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[0,a[, f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$. *Par hypothèse, la série de Taylor* $\sum\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ *est une série à termes positifs et* $R_n(x)=\displaystyle\int_0^x\underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{\geq 0}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\geq 0}dt\geq 0$.

   Donc $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[0,a[, \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(x)-R_n(x)\leq f(x)$. *Les sommes partielles de la série à termes positifs* $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ *étant majorées, cette série converge. Donc la série de Taylor de* f *converge en tout point* $x\in[0,a[$.

   (b) *Soient* x *et* y *tel que* $0<x<y<a$.
   Le changement de variable $t=\frac{x}{y}u$ *donne :*

$$R_n(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt=\frac{x}{y}\int_0^y\frac{\left(x-\frac{x}{y}u\right)^n}{n!}f^{(n+1)}\left(\frac{x}{y}u\right)du=\left(\frac{x}{y}\right)^{(n+1)}\int_0^y\frac{(y-u)^n}{n!}f^{(n+1)}\left(\frac{x}{y}u\right)du$$

   Or, la fonction $f^{(n+1)}$ *est croissante et* $f^{(n+1)}\left(\frac{x}{y}u\right)\leq f^{(n+1)}(u)$ *puisque* $\frac{x}{y}<1$. *Donc*

$$0\leq R_n(x)\leq\left(\frac{x}{y}\right)^{(n+1)}\int_0^y\frac{(y-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)du=\left(\frac{x}{y}\right)^{(n+1)}R_n(y)$$

   Pour $y<a$, *pour tout* $x\in[0,y[$, *on a la convergence uniforme du reste vers* 0. *Elle est donc somme d'une série entière sur* $]-a,a[$.

2. (a) *On montre par récurrence qu'il existe un polynôme* $Q_n(X)$ *à coefficients réels postifs tel que* $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x)=Q_n(\tan(x))$ *La question précédente nou dit que*

$$\forall x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

   car la fonction tangente étant impaire.

   (b) $a_0=\tan(0)=0$ *et* $a_1=\frac{\tan'(0)}{1!}=1$
   $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \tan x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ *et par dérivation,*

$$\tan'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}=1+\tan^2x=1+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)^2$$

   Notons $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ *le produit de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ *par elle-même :*
   on a alors : $b_0=a_0a_0=0, b_1=a_0a_1+a_1a_0=0, b_2=a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0=1$ *et plus généralement,* $\forall n\in\mathbb{N}, b_n=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$
   En identifiant les coefficients dans les deux séries entières $\tan'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)^2=1+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ *on obtient :* $\forall n\geq 1, (n+1)a_{n+1}=b_n=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$
   soit aussi $\forall n\geq 1, a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre

i) f est développable en série entière sur un voisinage de 0 ,

ii) il existe $\alpha > 0, M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\alpha, \alpha], \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M a^n n!$.

Solution **4.** *On procède par double implication :*
$\Leftarrow$: *s'il existe* $\alpha > 0, M > 0$ *et* $a > 0$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\alpha, \alpha], \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M a^n n!$, *alors l'inégalité de Taylor Lagrange nous dit que*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leq M(ax)^{n+1}.$$

On pose $\beta = \min(\alpha, \frac{1}{a})$, *et pour tout* $x \in [-\beta, \beta]$, $(ax)^{n+1}$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$.
$\Rightarrow$: *Si* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *pour tout* $x \in]-R, R[$ *où* $R > 0$ *est le rayon de convergence de la série, pour tout* $r \in [0, r[$ *et* $\theta \in [-\pi, \pi]$, *on a*

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i\,n\theta}$$

la convergence étant normale en θ *pour r fixé, car la série est absolument convergente sur le disque ouvert de convergence.*
Le théorème d'interversion série intégrale par convergence uniforme sur un segment, nous permet d'intégrer terme à terme pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) e^{-i\,p\theta}\, d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)\theta}\, d\theta = 2\pi a_l \Rightarrow \sup_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f(re^{i\,\theta})| \geq |a_n| r^n.$$

De plus, f *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$ *et* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. *On pose* $M_r = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$. *On a* $\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \dfrac{M_r}{r^n}$.
Soit $z \in]-R/2, R/2[$, *alors pour tout* $h \in]-R/2, R/2[$, *la série*

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \right).$$

Comme $|z| + |h| < R$, *la famille* $\left(\binom{n}{k} z^{n-k} h^k\right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ *est sommable. Le thérème de Fubini nous permet d'intervertir les sommes :*

$$\forall h \in]-R/2, R/2[, \;\; f(z+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_n \binom{n}{k} z^{n-k} \right) h^k$$

ce qui montre que f *est dévellopable en série entière en* z. *Le même raisonnement qu'en* 0 *montre que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{M_r}{(r/2)^n}$$

On en déduit que $M = M_r$ *et* $\alpha = R/2$ *répondent à la question.*