

PROGRAMME DE LA COLLE N° 14

Semaine du 19/01/2026

Séries entières ▷ **chapitre IX & TD n° 9** : comme la semaine dernière.

Variables aléatoires ▷ **chapitre X & TD n° 10** :

- loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$;
- la loi binomiale tend vers la loi de Poisson si $n \rightarrow \infty$ et $np_n \rightarrow \lambda$;
- une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ est d'espérance finie (ou X possède une espérance ou $X \in L^1$) si la série $\sum aP(X = a)$ est absolument convergente (en particulier, l'espérance est finie si l'ensemble $X(\Omega)$ est fini ou la *var* X est une fonction bornée) ;
- linéarité de l'espérance (si $X \in L^1$, alors $\alpha X + \beta \in L^1$ et $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$) ;
- si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors X est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum P(X \geq n)$ converge, auquel cas

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) ;$$

- espérance des trois lois classiques ;
- théorème de transfert ;
- si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi et on peut définir la variance

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

et $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$;

- variance des trois lois classiques ;
- inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev ;
- la série génératrice d'une *va* X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$; elle converge normalement sur $[-1, +1]$ au moins, la fonction génératrice G_X est donc définie et continue sur $[-1, +1]$ au moins et est \mathcal{C}^∞ sur $] -R, +R[$;
- expression de la loi de probabilité ($P(K = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$), de l'espérance (X est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1, et alors $E(X) = G'_X(1)$) et de la variance (X^2 est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1, et alors $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$) ;
- savoir retrouver les fonctions génératrices des *va* qui suivent les trois lois classiques et en déduire leur espérance et leur variance.