Feuille de T.D. n° 11

Espaces vectoriels normés

Exercice 1. Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N(P) = |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)|\, dt.$$

Montrer que la fonction N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Soient $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$ les trois normes classiques d'une fonction f de E.

1. Soit la suite des fonctions f_n définies par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n$$

   pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|_1$, $\|f_n\|_2$ et $\|f_n\|_\infty$.
2. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des suites u bornées telles que $u_0 = 0$.

1. Montrer que

$$\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad \text{et} \qquad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

   sont deux normes sur E.
2. Déterminer un réel k tel que : $\forall u \in E, \quad N(u) \le k \cdot \|u\|$.
3. Quel est le meilleur k possible ?
4. Soit un réel $a \in]0,1[$. Soit u la suite définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + a^n.$$

   Calculer $N(u)$ et $\|u\|$.
5. Les normes $\|\cdot\|$ et $N(\cdot)$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 4 (*Une fonction additive et continue est linéaire*)**.**

Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une fonction **additive**, *i.e.*

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

1. Soit un vecteur $x \in E$. Montrer que : pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}\varphi(x)$.
2. On munit l'espace vectoriel E d'une norme et on suppose que la fonction φ est additive et continue. Montrer que la fonction φ est linéaire.

Exercice 5 (Mines Ponts PC 2009)**.**

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(u-\mathrm{id}_E)$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)x = u^{n+1}(y)-y$.
2. On suppose que u est 1–lipschitzien. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u-\mathrm{id}_E)$.

Exercice 6. Soit un entier $n \geq 2$. On munit l'ev $\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de la norme définie par

1. $\|A\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

   (On a déjà montré que c'est une norme, qu'elle est subordonnée et donc sous-multiplicative ▷ **exemple 45 et proposition 44 du chapitre XI**). Justifier que la trace tr est une forme linéaire continue et déterminer, en fonction de n, sa norme subordonnée $\|\!|\mathrm{tr}|\!\|$.
2. $\|M\| = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |m_{ij}|$.

   Montrer que cette norme n'est pas sous-multiplicative mais que $n\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative.
3. $\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}(M^T M)}$.

   Montrer que cette norme est sous-multiplicative ▷ **une inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$**. Mais qu'elle n'est pas une norme subordonnée ▷ **calculer $\|I_n\|$**.

Exercice 7 (inégalités de Young, de Hölder & de Minkowski)**.**

Soient deux réels $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient u et v deux réels positifs. Prouver l'inégalité de Young
$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$
   de deux manières :
   (a) en étudiant, pour tout $v \geq 0$ fixé, la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \; u \mapsto \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} - uv$;
   (b) en utilisant la **concavité** de la fonction ln.
2. Soient deux réels $a < b$ et l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a,b])$.
   (a) Soient F et G deux fonctions positives de E telles que $\int_a^b F^p = \int_a^b G^q = 1$. Montrer que $\int_a^b FG \leq 1$.
   (b) Soient f et g deux fonctions positives de E. Prouver l'inégalité de Hölder
$$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q\right)^{1/q}.$$
   (c) Examiner le cas particulier où $p = q = 2$.
3. (a) Soient f et g deux fonctions positives de E. En remarquant que $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p/q}$, prouver l'inégalité de Minkowski
$$\left(\int_a^b (f+g)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p\right)^{1/p}.$$
   (b) Montrer que $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ définit une norme sur l'espace vectoriel E.

   ▷ **Dans le corrigé, on prouve aussi que : $\|f\|_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.**

Exercice 8 (Séries entières & convergence uniforme)**.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n défini par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Soit $R > 0$. On munit l'*ev* $E = \mathcal{C}([-R, +R])$ de la norme ∞.

1. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'*evn* E. Quelle est sa limite ?
2. L'ensemble des fonctions polynomiales est-il un fermé de l'espace vectoriel normé E ?
3. Montrer que, à partir d'un certain rang N, aucun polynôme P_n ne s'annule sur l'intervalle $[-R, +R]$.

Exercice 9 (*oral Centrale PC 2011*)**.**

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par $\forall f \in E,\ \|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$. Soient

$$\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 f \quad \text{et} \quad \Psi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 |f|.$$

1. Montrer que, pour tout $f \in E$, $|\Phi(f)| \leq \Psi(f) \leq \|f\|_2$.
2. Les applications Φ et Ψ sont-elles continues de $(E, \|\ \ \|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{A}_n$, respectivement $\mathcal{S}_n$, le sous-espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétriques, respectivement symétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont fermés.
2. Soint A une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 11.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $A^n = 0$. En déduire que l'ensemble des matrices nilpotentes de taille n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que toute matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables. En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 12. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leur adhérence.

Montrer que :

1. si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$;
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
4. Soit $E = \mathbb{R}$. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $\bar{A} \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

Exercice 13 (inégalité de Bessel & égalité de Parseval)**.**

Soit E un espace préhilbertien et $\|\cdot\|_2$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. Soit x un vecteur de E.

1. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on note p_n la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $F_n = \mathrm{Vect}\left(e_k, k\in[\![0,n]\!]\right)$. Montrer que la suite des réels $\|x-p_n(x)\|_2$ est décroissante.
2. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **totale**, *i.e.* $\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_n, n\in\mathbb{N})$ est dense dans E. Montrer que la suite des réels $\|x-p_n(x)\|_2$ tend vers 0.
3. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **orthonormée**, *i.e.* $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \langle e_i|e_j\rangle=\delta_{ij}$. Prouver, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'inégalité de Bessel :
$$\sum_{k=0}^{n}\langle x|e_k\rangle^2 \leq \|x\|_2^2.$$
En déduire que la série numérique $\sum\langle x|e_k\rangle^2$ converge.
4. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **orthonormée** et **totale**. Prouver l'égalité de Parseval :
$$\sum_{k=0}^{\infty}\langle x|e_k\rangle^2 = \|x\|_2^2.$$

Exercice 14 (*Une norme est euclidienne* ssi *elle vérifie l'identité du parallélogramme*)**.**

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :
$$\forall(x,y)\in E^2,\quad \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$
Soit $f\,:\,E^2\to\mathbb{R}$ l'application définie par :
$$\forall(x,y)\in E^2,\quad f(x,y)=\frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}.$$

1. Soient x, y et z trois vecteurs de E. Montrer que :
   (a) $f(x+y,z)+f(x-y,z)=2f(x,z)$;
   (b) $f(0_E,z)=0$ et $f(2x,z)=2f(x,z)$;
   (c) $f(x,z)+f(y,z)=f(x+y,z)$.
2. Montrer que la fonction f est bilinéaire, symétrique, définie et positive

   ▷ **l'exercice 4 de ce TD et le corollaire 36 du chapitre XI**.
3. En déduire qu'il existe un unique produit scalaire tel que $\forall v\in E,\ \langle v|v\rangle=\|v\|^2$.

Et aussi : les exercices 1,34,35,36,37,38,39,44,45,54 de la banque CCINP & les exercices 3 et 4 du DS n° 5 MPI/* 2024-2025.