Colle n° 14

Séries entières & variables aléatoires

Exercice 1. Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n}\cos(n^2 x)$.

1. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ et que

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k}\mathrm{e}^{-n}\cos(n^2x) \quad \text{et} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} n^{4k+2}\mathrm{e}^{-n}\sin(n^2x)$$

   pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ ▷ **corollaire 19 du chapitre VII**.
2. En déduire que le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ de la fonction f est nul.

Exercice 2 (tiré de Mines Ponts Maths 2 PC 2017)**.**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, alors $X = 5$. Pour modéliser cette expérience aléatoire, on introduit l'univers $\Omega = [\![1, n]\!]^{n+1}$.

1. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$: montrer que l'événement $(X = k)$ n'est pas vide et que sa probabilité $P(X = k)$ n'est pas nulle.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(X > k) \neq 0$ et :

$$P(X > k+1) = P(X > k+1 | X > k) \cdot P(X > k).$$

3. Pour chaque $k \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer $P(X > k+1 | X > k)$.
4. En déduire $P(X > k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 3. Ils sont n joueurs ($n > 2$) à jouer une partie à pile ou face en jetant chacun une pièce. L'un d'entre eux gagne la partie si sa pièce donne un résultat différent des $n-1$ autres. On joue jusqu'à ce qu'apparaisse le premier gagnant ; soit X le nombre de parties alors jouées. Calculer, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = k)$. Étudier l'espérance et la variance de X.