Colle 14 Variables aléatoires

BRAHIMI Dhyae

Exercice 1. 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - nP(X > n).$$

(b) On suppose que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.

(c) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $\big(nP(X > n)\big)_n$ tend vers 0, puis que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ converge, et enfin que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

2. Application : on dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.

(a) Que vaut $\mathbb{P}(X \leq k)$? En déduire la loi de X.

(b) A l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

(c) A l'aide d'une somme de Riemann, démontrer que la suite $\left(\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque N tend vers $+\infty$) que l'on déterminera.

(d) En déduire que $\lim_{N \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X)}{N} = \dfrac{n}{n+1}$.

3. Montrer que si X admet un moment 'ordre 2, alors

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)\mathbb{P}(X > k).$$

Solution **1.** 1. (a) *Pour $n \geq 1$, on peut écrire :*

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)\right) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)\mathbb{P}(X>k) - nP(X>n) + \mathbb{P}(X>0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k) - nP(X>n).$$

(b) *On a, pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$. La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est majorée. C'est que la série converge.*

(c) *Si X admet une espérance, la série $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge. Mais :*

$$0 \leq nP(X>n) = n\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini, comme reste d'une série convergente. Donc : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$.

(d) i. *On a $X \leq k$ si et seulement si les n épreuves ont amené un résultat inférieur ou égal à k, et on a donc :*

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \implies \mathbb{P}(X>k) = 1-\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Quant à la loi de X, on trouve, pour $1 \leq k \leq N$:

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X\leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

ii. *Par la question précédente : $\mathbb{E}(X) = N - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$.*

iii. *On reconnait ici une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^n$, continue sur $[0,1]$. On a donc, pour N qui tend vers l'infini :*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \sim \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

iv. *On a :*

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{N} = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \to 1-\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

(e) *On utilise le même type d'argument :*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k^2\left(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\mathbb{P}(X>k) - n^2P(X>n).$$

Si X admet une variance, X admet un moment d'ordre 2, et la série $\sum k^2P(X=k)$ converge. Mais :

$$0 \leq n^2P(X>n) = n^2\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k^2P(X=k).$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et donc :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\mathbb{P}(X>k).$$

DOUCET–POURNIN Louka

Exercice 2. Quatre individus vivent dans la forêt, chacun se déplaçant avec un bidon d'eau. L'eau étant un bien précieux, ils décident de partager leurs réserves d'eau équitablement dès que deux d'entre eux se croisent.
Autrement dit, si deux individus se rencontrent et si l'on note a et b leurs réserves d'eau (exprimées en litres) avant la rencontre, ils repartent chacun avec une réserve d'eau égale à $(a+b)/2$. Les rencontres se font uniformément au hasard, et toujours deux par deux.

1. Modéliser la situation en supposant qu'il y a une infinité de rencontres.
2. Justifier que presque sûrement la suite des réserves est constante à partir d'un certain rang.
3. Donner un exemple d'une situation théorique où la suite des réserves n'est pas constante à partir d'un certain rang.
4. Justifier que la suite des réserves converge.

Solution **2.**

1. *On numérote les individus de 1 à 4. Pour tout $k \in [\![1,4]\!]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle x_k^n la quantité d'eau de l'individu k à l'étape n (après n rencontres). et on pose $x^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, x_4^n) \in \mathbb{R}^4$. La suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera appelée la suite des réserves. On pose*

$$R = \{\{i,j\}, i,j \in [\![1,4]\!], i \neq j\} \subset [\![1,4]\!]^2$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R_n \in R$ représente le couple d'individus concernés par la rencontre n. Les rencontres sont indépendantes et uniformes, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \{i,j\} \in R, \quad \mathbb{P}\left(R_n = \{i,j\}\right) = \frac{1}{|R|} = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

Pour tout $\{i,j\} \in R$, on note $f_{\{i,j\}}$ l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ qui à $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ associe $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ défini par :

$$\forall k \in [\![1,4]\!], \quad x'_k = \begin{cases} (x_i + x_j)/2 & \text{si } k \in \{i,j\} \\ x_k & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, lors de la rencontre $n+1$, si les individus i et j qui se croisent, alors $x^{n+1} = f_{\{i,j\}}(x^n)$.

2. *Supposons que les rencontres $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ soient les suivantes : 1 rencontre 2 ;3 rencontre 4; 1 rencontre 4; 2 rencontre 3 (en d'autres termes, $R_{4k} = \{1,2\}, R_{4k+1} = \{3,4\}, R_{4k+2} = \{1,4\}$ et $R_{4k+3} = \{2,3\}$). Alors, à l'issue de ces 4 rencontres, la suite des réserves est constante :*

$$\forall n \geqslant 4, \forall k \in [\![1,4]\!], \quad x_k^n = \frac{x_{4k}^1 + x_{4k}^2 + x_{4k}^3 + x_{4k}^4}{4}$$

La probabilité pour que cette suite se produise aux rangs $4k$ à $4k+3$ est $p=\left(\frac{1}{6}\right)^4$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k-1} \subset A_{4k}$$

Par hypothèse, les B_k *sont indépendants et*

$$\mathbb{P}\left(A_k\right) \geqslant \mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k-1}) \geq 1-\prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(\bar{B}_i\right) \geq 1-(1-p)^k .$$

On en déduit que $\lim_{k \rightarrow+\infty} \mathbb{P}\left(A_k\right)=1$.

Appelons A *l'événement « la suite* $\left(x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *est constante à partir d'un certain rang >. On a* $A=\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$, *or* $\left(A_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ *est croissante pour l'inclusion donc :*

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)=\lim_{k \rightarrow+\infty} \mathbb{P}\left(A_k\right)=1$$

3. *Supposons que* x_1^0, x_2^0 *et* x_3^0 *ne sont pas tous les trois égaux et on suppose les rencontres*

$$R_{3k+1}=\{1,2\}, \quad R_{3k+2}=\{2,3\}, \quad R_{3k+3}=\{3,1\}.$$

Soit $x_1^1=x_1^2=x_1^3$ *(cas où* $x_1^0+x_2^0=2 x_3^0$*), les trois premiers individus n'ont jamais la même quantité d'eau : une configuration* (a, a, b) *avec* $a \neq b$ *ne peut jamais donner* (c, c, c) *en faisant la moyenne de deux d'entre eux !*

4. *Montrons que la suite des réserves* $\left(x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge toujours. Pour tout* $x \in \mathbb{R}^4$, *on pose :*

$$\ell(x)=\sum_{i<j}\left|x_i-x_j\right|$$

On a

$$\ell\left(x^{\prime}\right)+\left|x_i-x_j\right| \leqslant \ell(x)$$

où $x^{\prime}=f_{\{i, j\}}(x)$. *Montrons-le dans le cas où* $i=1$ *et* $j=2$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
\ell\left(x^{\prime}\right) & =2\left|\left(x_1+x_2\right) / 2-x_3\right|+2\left|\left(x_1+x_2\right) / 2-x_4\right|+\left|x_3-x_4\right| \\
& =\left|x_1-x_3+x_2-x_3\right|+\left|x_1-x_4+x_2-x_4\right|+\left|x_3-x_4\right|
\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient bien que $\ell\left(x^{\prime}\right)+\left|x_1-x_2\right| \leqslant \ell(x)$. *On déduit en particulier de cette inégalité que la suite* $\left(\ell\left(x^n\right)\right)_{n \geqslant 0}$ *est décroissante. Comme elle est minorée par 0 , elle converge.*

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^4,\|x\|_1=\sum_{k=1}^4\left|x_k\right|$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a, par un calcul immédiat :*

$$\left\|x^{n+1}-x^n\right\|_1=\left\|f_{\{i, j\}}\left(x^n\right)-x^n\right\|_1=\left|x_i^n-x_j^n\right| \leqslant \ell\left(x^n\right)-\ell\left(x^{n+1}\right)$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $k \in \llbracket 1,4 \rrbracket$ *:*

$$\left|x_k^{n+1}-x_k^n\right| \leqslant \ell\left(x^n\right)-\ell\left(x^{n+1}\right)$$

Comme la suite $\left(\ell\left(x^n\right)\right)_{n \geqslant 0}$ *converge, la série* $\sum_{n \geqslant 0}\left(\ell\left(x^n\right)-\ell\left(x^{n+1}\right)\right)$ *converge également. La série* $\sum_{n \geqslant 0}\left(x_k^{n+1}-x_k^n\right)$ *est donc absolument convergente. On en déduit que la suite* $\left(x_k^n\right)_{n \geqslant 0}$ *converge pour tout* $k \in \llbracket 1,4 \rrbracket$, *ce qui signifie bien que la suite des réserves converge.*

Remarque : posons $\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0\right)=(a, b, c, d)$. *Dans le cas particulier imaginé précédemment (rencontres 1-2, 2-3, 3-1, 1-2, 2-3, 3-1 etc.),* $\left(x_4^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *est constante égale à* d, *tandis que pour tout* $i \in \llbracket 1,3 \rrbracket,\left(x_i^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $(a+b+c) / 3$. *En effet, posons* $\ell_i=\lim_{n \rightarrow+\infty} x_i^n$. *Pour commencer, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $x_1^n+x_2^n+x_3^n=a+b+c$, *donc un passage à la limite donne* $\ell_1+\ell_2+\ell_3=a+b+c$. *Ensuite, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a* $x_1^{3k+1}=x_2^{3k+1}$ *et* $x_2^{3k+2}=x_3^{3k+2}$. *Un autre passage à la limite, lorsque* k *tend vers* $+\infty$ *dans ces relations, fournit* $\ell_1=\ell_2$ *et* $\ell_2=\ell_3$. *On a donc bien* $\ell_1=\ell_2=\ell_3=(a+b+c) / 3$.

SAUVETRE Baptiste

Exercice 3. Une fonction f convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle est une fonction telle que

$$\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Lors d'une soirée, n amis ($n \geq 2$) jouent au jeu suivant. Chacun met un euro sur la table et inscrit pile ou face sur un papier sans que les autres puissent connaître son choix. Un serveur lance ensuite une pièce équilibrée. La somme de n euros est partagée (théoriquement sous forme fractionnaire) entre les gagnants (ceux qui ont fait le bon choix). S'il n'y a pas de gagnant, on donne la somme totale au serveur en guise de pourboire.

1. Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on note X_k la somme aléatoire que reçoit le joueur k. Calculer l'espérance de X_k.
2. Dans cette question, on suppose qu'une nouvelle personne arrive avant que la pièce ne soit lancée. On demande à un joueur s'il accepte que cette nouvelle personne participe au jeu.
   Que doit répondre ce joueur s'il veut maximiser le gain espéré ? Quel doit être l'avis du serveur si il veut maximiser le pourboire espéré ?
3. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, pour tout n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de points de I et tout n-uplet $(t_1, ..., t_n)$ de réels positifs tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a :
   $$f(t_1x_1 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + ... + t_nf(x_n).$$
   (b) Soit X une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs contenues dans I. Montrer que :
   $$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$
4. On se place à nouveau dans un jeu à n joueurs.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(X_k^2)$ sous forme d'une somme finie.
   (b) Montrer que :
   $$\mathbb{E}(X_k^2) \geq \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

Solution **3.**

1. *Posons* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *la variable aléatoire à valeur dans* $\{0, n\}$.
   $(S_n = 0)$ *ssi tous les joueurs perdent. Les variables* X_i *sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre* $1/2$. $\mathbb{P}(S_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. *On en déduit*

$$\mathbb{E}(S_n) = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = n \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

   On en déduit que $\mathbb{E}(X_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. *Le gain moyen augmente avec le nombre de joueurs, donc le joueur à intérêt d'accepter un nouveau joueur.*
   Par contre, le gain moyen du serveur est $\frac{n}{2^n}$ *et* $x \mapsto \frac{x}{2^x}$ *est décroissante pour* $x \geq 2$. *Donc le serveur a intérêt à refuser le nouvel arrivant.*

3. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe.*
   (a) *Une récurrence avec utilisation du barycentre partiel donne le résultat (c'est du cours).*
   (b) *Une application directe du théorème de transfert permet de conclure.*

4. *Si* G_k *est l'évènement le joueur* k *gagne et* Y *le nombre de gagnants différents de* k, *on a*
   $\mathbb{P}(X_k = n/r) = \mathbb{P}(Y = r - 1 \cap G_k) \overset{\text{indépendants}}{=} \mathbb{P}(Y = r - 1)\mathbb{P}(G_k) = \frac{1}{2} \times \binom{n-1}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, *car* Y *suit une loi binomiale de paramètre* $n - 1$ *et* $1/2$.

$$\mathbb{E}(X_k^2) = \sum_{r=1}^{n} \frac{n^2}{r^2} \binom{n-1}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n^2}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^2} \binom{n-1}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

   La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ *est convexe et soit* U *une loi binomiale de paramètres* $n - 1$ *et* $\frac{1}{2}$. *La question précédente donne*

$$\mathbb{E}(X_k^2) = \frac{n^2}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^2} \binom{n-1}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n^2}{2} \times \mathbb{E}(g(U)) \geq \frac{n^2}{2} \times g(\mathbb{E}(U))$$

$$= \frac{n^2}{2} \times \frac{1}{\left((n-1) \times \frac{1}{2} + 1\right)^2} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$