Corrigé de la colle n° 13

Séries entières

18 janvier 2026

Exercice 1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ et montrer que, pour tout $x \in]-R, +R[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$. Pour tout $x \in]-R, +R[$,

$$\begin{aligned}
(1-x-x^2)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2} x^n \\
&= u_0 + u_1 x - u_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} (u_n - u_{n-1} - u_{n-2}) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (u_n - u_{n-1} - u_{n-2}) x^n \\
&= x
\end{aligned}$$

Les racines du polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - X - 1$ associé à la suite (u_n) sont $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. D'où

$$\exists (K,L) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = K\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + L\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les constantes K et L sont déterminées par les deux C.I. $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Or $\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| > 1$ et $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, d'où $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$. Par suite, R est égal au rayon de convergence de la série géométrique $\sum \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}x\right)^n$, donc $R = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Exercice 2 (produit de Cauchy & théorème radial d'Abel)**.**

1. Rappeler le théorème du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes. Et celui du produit de Cauchy de deux séries entières.
2. Quel est le terme général du produit de Cauchy des séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, où $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$, pour tout $n \geqslant 1$, et $u_0 = v_0 = 0$? En déduire que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas toujours une série convergente.

3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et, pour tout entier naturel n, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

On suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer, à l'aide du théorème radial d'Abel, que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

---

1. Voir le cours.
2. Le terme général du produit de Cauchy est $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}}$.

   Or $k(n-k) \leq \dfrac{n^2}{4}$ (par étude des variations de $x \mapsto x(n-x)$ ou bien en remarquant que $(n-2k)^2 \geq 0$), et par conséquent $|w_n| \geq \dfrac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$, ce qui montre que la série de terme général w_n diverge grossièrement.

   Donc le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas toujours convergent.
3. Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n\, x^n$ et $\sum v_n\, x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. D'après le cours, le produit de Cauchy a un rayon de convergence supérieur ou égal au minimum des deux rayons, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n\, x^n$est lui aussi au moins égal à 1. Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a $U(x)V(x) = W(x)$, pour tout $x \in]-1,1[$.

   Si x tend vers 1 par valeurs inférieures, alors $U(x)$ tend vers $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, $V(x)$ tend vers $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $W(x)$ tend vers $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$: c'est vrai par continuité des sommes U, V et W si les rayons sont strictement supérieurs à 1 ; et c'est encore vrai si un rayon vaut 1 d'après le théorème radial d'Abel car les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

   Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième, c'est-à-dire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 3. 1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ converge si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$.

2. Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum \dfrac{x^n}{n^a + (-1)^n}$ est-elle convergente ? (On discutera suivant les valeurs du paramètre a.)

---

1. Si $a = 0$, alors la suite (u_n) n'est pas bien définie. Supposons donc $a \neq 0$. Soit, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$:
   - si $a < 0$, alors la suite u_n ne tend pas vers zéro, donc la série $\sum u_n$ diverge.
   - si $a > 0$, alors on calcule le *D.L.*

   $$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^a}} = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}}(1 + \varepsilon_n).$$

   Or la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a}$ converge d'après la TSA car la suite $\frac{1}{n^a}$ tend vers zéro en décroissant. Et les séries $\sum \dfrac{1}{n^{2a}}(1+\varepsilon_n)$ et $\sum \dfrac{1}{n^{2a}}$ sont de même nature car les suites $\dfrac{1}{n^{2a}}$ (qui ne change pas de signe) et $\dfrac{1}{n^{2a}}(1+\varepsilon_n)$ sont équivalentes, donc convergent si, et seulement si, $2a > 1$.

   Donc la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$.
2. Soit $c_n = \dfrac{1}{n^a + (-1)^n}$. La série $\sum c_n x^n$ est une série entière. On détermine son rayon de convergence R grâce au critère de D'Alembert : pour tout n, $|c_n x^n| > 0$ et

   $$\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|,$$

   d'où la série $\sum |c_n x^n|$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. Donc $R = 1$. Et aux bords ?
   - en $x = -1$, la série $\sum c_n x^n$ converge si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$ d'après l'étude précédente ;
   - en $x = +1$, la suite $c_n x^n = c_n$ est positive et équivalente à $\dfrac{1}{n^a}$, d'où la série $\sum c_n$ converge si, et seulement si, $a > 1$ d'après le critère de Riemann.