# Corrigé du Kdo du 20/01/2026

*E.v.n.*

21 janvier 2026

**Exercice 1.** Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E$ de dimension deux. La norme « un » d'un vecteur $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est définie par $\|\vec{v}\|_1 = |x| + |y|$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme représenté, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, par la matrice $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $|||f|||_1 = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$.
2. Soient un réel $\alpha > 0$ et un vecteur $\vec{u} = 1\vec{\imath} + \alpha\vec{\jmath}$. Soit $p : E \to E, \ \vec{v} \mapsto p(\vec{v})$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{u})$. Calculer$|||p|||_1$ en fonction de $\alpha$.
3. Dessiner la boule unité $\mathcal{B}$ et son image directe par l'application $p$. En utilisant ce dessin, retrouver la valeur de $|||p|||_1$.

---

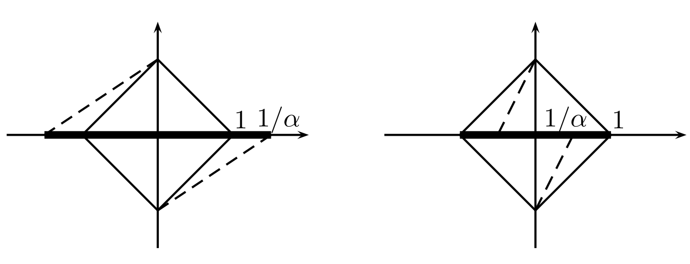
1. Soit la constante $k = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$. Pour tout $\vec{v} \in E$, $\|f(\vec{v})\| = |ax+cy| + |bx+dy| \leq |a||x| + |c||y| + |b||x| + |d||y| \leq (|a| + |b|)\,|x| + (|c| + |d|)\,|y| \leq k\,(|x| + |y|) \leq k \cdot \|\vec{v}\|$.

   De plus, $k$ est la meilleure (la plus petite) constante possible car :
   - si $\max(|a| + |b|, |c| + |d|) = |a| + |b|$, alors en choisissant $x = 1$ et $y = 0$, on réalise l'égalité $\|f(\vec{v})\| = |ax + cy| + |bx + dy| = |a| + |b| = (|a| + |b|)\,(|1| + |0|) = k\|\vec{v}\|$ ;
   - de même si $\max(|a| + |b|, |c| + |d|) = |c| + |d|$, en choisissant $x = 0$ et $y = 1$).

   Donc $|||f|||_1 = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$.
2. $p(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$ et $p(\vec{\jmath}) = -\frac{1}{\alpha}\vec{\imath}$ car $\vec{\jmath} = -\frac{1}{\alpha}\vec{\imath} + \frac{1}{a}\vec{u}$ et $p(\vec{u}) = \vec{0}$. La matrice, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de $p$ est donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Et, par suite : $|||p|||_1 = \max(1, \frac{1}{\alpha})$.
3. 




$0 < \alpha < 1$ $\qquad$ $\alpha > 1$

En utilisant le dessin : $|||p|||_1 = \frac{1}{\alpha}$ si $0 < \alpha \leq 1$ et $|||p|||_1 = 1$ si $1 \leq \alpha$.