Programme de la colle n° 15

Semaine du 26/01/2026

Variables aléatoires ▷ **chapitre X & TD n° 10** : comme la semaine dernière.

Espaces vectoriels normés ▷ **chapitre XI & TD n° 11** (exercices 1,2,3,4,5,7 et 14) :

— définition d'une norme et de la distance associée.
— normes 1, 2 et ∞ sur l'*ev* $\mathbb{K}^n$ et sur l'*ev* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, extension de la norme ∞ à l'*ev* des fonctions bornées sur un intervalle I ; lien entre norme ∞ sur un intervalle I d'une fonction et convergence uniforme sur I d'une suite de fonctions.
— équivalence de normes ; toutes les normes sur un *ev* de dimension finie sont équivalentes (admise).
— limite d'une suite de vecteurs convergente, unicité de la limite ; suites extraites, toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite ; si l'*evn* est de dimension finie, alors une suite de vecteurs u_n tend vers un vecteur ℓ *ssi* chaque coordonnée de u_n tend vers chaque coordonnée de ℓ.
— partie bornée, suite de vecteurs bornée, fonction bornée ; toute suite convergente est bornée.
— point adhérent à une partie d'un *evn*, ~~adhérence d'une partie d'un *evn*, caractérisation séquentielle de l'adhérence ; densité d'une partie.~~
— limite d'une fonction en un point adhérent à son ensemble de définition ; si l'*evn* d'arrivée de f est de dimension finie, alors $f(x)$ tend vers ℓ *ssi* chaque coordonnée de $f(x)$ tend vers chaque coordonnée de ℓ ; caractérisation séquentielle de la limite.
— continuité d'une fonction ; toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue (les réciproques sont fausses) ; toute norme est $1-$lipschitzienne.
— ~~CNS pour qu'une application (multi-)linéaire soit continue ; si l'*evn* de départ d'une application f (multi-)linéaire est de dimension finie, alors f est continue.~~
— ~~norme subordonnée d'une application linéaire continue (définitions et propriétés : c'est une norme sous-multiplicative).~~
— sphères, boules ouvertes et boules fermées, ~~définition d'un point intérieur à une partie, d'une partie ouverte et d'une partie fermée d'un *evn* ; intersection d'un nombre fini et union d'ouverts, union d'un nombre fini et intersection de fermés ; caractérisation séquentielle d'un fermé.~~
— ~~l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert, de même pour un fermé ; en particulier, si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E, $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ sont des fermés de E.~~

(La compacité, la connexité par arcs et la convexité ne sont pas au programme de cette colle, les séries vectorielles non plus.)