Corrigé du T.D. n° 11

Espaces vectoriels normés

22 janvier 2026

Exercice 1. Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N(P) = |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)|\, dt.$$

Montrer que la fonction N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Soient α un réel, P et Q deux polynômes :

* $\forall t \in [0,1],\ (\alpha P)'(t) = \alpha P'(t)$, d'où $N(\alpha P) = |\alpha P(0)| + \displaystyle\int_0^1 |\alpha P'(t)|\, dt = |\alpha| N(P)$;

** D'une part $|(P+Q)(0)| = |P(0)+Q(0)| \leq |P(0)| + |Q(0)|$, d'autre part $\forall t \in [0,1],\ |(P+Q)'(t)| = |P'(t)+Q'(t)| \leq |P'(t)| + |Q'(t)|$, d'où (croissance de l'intégrale) $\int_0^1 |(P+Q)'(t)|\, dt \leq \int_0^1 |P'(t)|\, dt + \int_0^1 |Q'(t)|\, dt$, d'où $N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$;

*** Si $N(P) = 0$, alors $\begin{cases} P(0) = 0 & (\heartsuit) \\ \int_0^1 |P'(t)|\, dt = 0 & (\heartsuit\heartsuit) \end{cases}$. Or la fonction $|P'|$ est positive (car c'est une valeur absolue) et continue (car c'est la valeur absolue d'un polynôme) sur $[0,1]$ d'où $(\heartsuit\heartsuit)$ implique qu'elle est nulle sur $[0,1]$. D'où la fonction P est constante sur l'intervalle $[0,1]$, elle est donc nulle sur $[0,1]$ car $(\heartsuit)$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, donc le polynôme P est nul. On en déduit que N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ (et *a fortiori* sur tout *sev* de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\mathbb{R}_n[X]$, mais ce n'est pas demandé).

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Soient $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$ les trois normes classiques d'une fonction f de E.

1. Soit la suite des fonctions f_n définies par
$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n$$
pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|_1$, $\|f_n\|_2$ et $\|f_n\|_\infty$.
2. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ?

---

1. $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\, dt = \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$

   $\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f_n(t)]^2\, dt} = \sqrt{\int_0^1 t^{2n}\, dt} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

   $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = \sup\limits_{t \in [0,1]} t^n = 1.$
2. Par l'absurde : supposons qu'il existe une constante α telle que $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leq \alpha \cdot \|f\|_1$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_\infty \leq \alpha \cdot \|f_n\|_1$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \alpha \cdot \frac{1}{n+1}$. C'est absurde car $\frac{1}{n+1} \to 0$, donc les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
3. Par l'absurde : supposons qu'il existe une constante β telle que $\forall f \in E,\ \|f\|_2 \leq \beta \cdot \|f\|_1$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_2 \leq \gamma \cdot \|f_n\|_1$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \beta \cdot \frac{1}{n+1}$. C'est absurde car $\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, donc les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 3.
Soit E l'espace vectoriel des suites u bornées telles que $u_0 = 0$.

1. Montrer que
$$\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad \text{et} \qquad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$
sont deux normes sur E.
2. Déterminer un réel k tel que : $\forall u \in E, \quad N(u) \leq k \cdot \|u\|$.
3. Quel est le meilleur k possible ?
4. Soit un réel $a \in]0,1[$. Soit u la suite définie par
$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + a^n.$$
Calculer $N(u)$ et $\|u\|$.
5. Les normes $\|\cdot\|$ et $N(\cdot)$ sont-elles équivalentes ?

---

1. $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est une norme sur E car :

   * $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in E, \quad \|\lambda u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda u_n| = |\lambda| \|u\|$;

   ** $\forall u \in E,\ \forall v \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\| + \|v\|$ qui est un majorant, d'où $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ car $\|u+v\|$ est le plus petit majorant ;

   *** $\|u\| = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| = 0 \implies u = 0$.

   $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$ est une norme car :

   * $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in E, \quad N(\lambda u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda(u_{n+1} - u_n)| = |\lambda| N(u)$;

   ** $\forall u \in E,\ \forall v \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |(u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n)| \leq |u_{n+1} - u_n| + |v_{n+1} - v_n| \leq N(u) + N(v)$ qui est un majorant, d'où $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ car $N(u+v)$ est le plus petit majorant ;

   *** $N(u) = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \implies u = 0$ car $u_0 = 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq |u_n| + |u_{n+1}| \leq 2\|u\|$ qui est un majorant, d'où $N(u) \leq 2\|u\|$ car $N(u)$ est le plus petit majorant.
3. 2 est le plus petit k tel que $\forall u \in E,\ N(u) \leq k\|u\|$ car : si $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = (-1)^n \end{cases}$, alors $N(u) = 2\|u\|$ et $u \neq 0_E$.
4. $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a^n| = 1$ car : $a^0 = 1$ et la suite (a^n) décroît car $a \in]0,1[$.

   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}$ car $a \neq 1$. De plus, $a < 1$, d'où : $|u_n| = u_n \leq \frac{1}{1-a}$ qui est majorant. Et c'est le plus petit majorant car $\lim u_n = \frac{1}{1-a}$. Donc $\|u\| = \frac{1}{1-a}$.
5. Par l'absurde : supposons qu'il existe une constante γ telle que $\forall u \in E,\ \|u\| \leq \gamma N(u)$. En particulier, pour la suite u de la question précédente, $\|u\| = \frac{1}{1-a} \leq \gamma N(u) = \gamma$. Ceci est vrai pour tout $a \in]0,1[$ et les inégalités larges passent à la limite. Or $\frac{1}{1-a} \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. C'est absurde, donc les normes $\|\cdot\|$ et $N(\cdot)$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 (*Une fonction additive et continue est linéaire*)**.**

Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une fonction **additive**, *i.e.*
$$\forall (u,v) \in E^2,\ \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

1. Soit un vecteur $x \in E$. Montrer que : pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}\varphi(x)$.
2. On munit l'espace vectoriel E d'une norme et on suppose que la fonction φ est additive et continue. Montrer que la fonction φ est linéaire.

---

1. (a) Par récurrence, on montre pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété P_n « $\varphi(nx) = n\varphi(x)$ ».
      - Par additivité, $\varphi(x + 0_E) = \varphi(0_E) + \varphi(x)$, d'où $\varphi(0_E) = 0$. Or $0x = 0_E$, d'où P_0.
      - On suppose P_n. Par additivité, $\varphi(nx + x) = \varphi(nx) + \varphi(x) = n\varphi(x) + \varphi(x)$ car P_n. Donc P_{n+1}.
      - Donc $\varphi(nx) = n\varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par additivité, $\varphi\,(nx + (-nx)) = \varphi(nx) + \varphi(-nx)$. Or $\varphi(0_E) = 0$, d'où $\varphi(-nx) = -\varphi(nx)$ qui est égal à $-n\varphi(x)$ d'après la question précédente. Donc $\varphi(kx) = k\varphi(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$: $q\varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \varphi\left(q\frac{p}{q}x\right) = \varphi(px) = p\varphi(x)$. On divise par q qui n'est pas nul : $\varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}\varphi(x)$.

2. (a) Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$. De l'additivite de φ, on a déduit que $\forall r \in \mathbb{Q},\ \varphi(rx) = r\varphi(x)$. Or $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe donc une suite de rationnels r_n tels que $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(r_n x) = r_n\varphi(x)$ et :

   — d'une part, $r_n\varphi(x)$ tend vers $\lambda\varphi(x)$;

   — d'autre part, $\varphi(r_n x)$ tend vers $\varphi(\lambda x)$ car $r_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda x$ et la fonction φ est continue.

   Donc $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ par unicité de la limite.

   (b) Soient un réel λ et deux vecteurs x et y : $\varphi(\lambda x + y) = \varphi(\lambda x) + \varphi(y)$ par additivité et on vient de montrer que $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$. Donc $\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$: la fonction φ est linéaire.

Exercice 5 (Mines Ponts PC 2009)**.**

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad (n+1)x = u^{n+1}(y) - y$.
2. On suppose que u est 1–lipschitzien. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

---

1. Soit x dans l'intersection des deux sous-espaces en question. Il existe alors $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$, et il vérifie $x = u(x)$. Mais alors $x = u^k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui s'écrit encore
$$\forall k \in \mathbb{N},\quad x = u^{k+1}(y) - u^k(y).$$
En sommant ces égalités pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on obtient, par télescopage,
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad (n+1)x = u^{n+1}(y) - y.$$
2. Comme E est de dimension finie, la formule du rang appliquée à l'endomorphisme $v = u - \mathrm{id}_E$ montre que $\dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) + \dim \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) = \dim E$. Il reste à montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.

   De la première question, l'inégalité triangulaire permet de déduire que $(n+1)\|x\| \leqslant \|u^{n+1}(y)\| + \|y\|$. Comme u est 1–lipschitzienne, il en est de même de toutes les puissances de u, donc $\|u^{n+1}(y)\| \leqslant \|y\|$. Par suite,
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \|x\| \leqslant \frac{2\|y\|}{n+1}.$$
   Les inégalités larges passant à la limite, on obtient $\|x\| = 0$ en faisant tendre n vers ∞, donc $x = 0$.

Exercice 6. Soit un entier $n \geq 2$. On munit l'ev $\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de la norme définie par

1. $\|A\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

   (On a déjà montré que c'est une norme, qu'elle est subordonnée et donc sous-multiplicative ▷ **exemple 45 et proposition 44 du chapitre XI**). Justifier que la trace tr est une forme linéaire continue et déterminer, en fonction de n, sa norme subordonnée $|||\mathrm{tr}|||$.
2. $\|M\| = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |m_{ij}|$.

   Montrer que cette norme n'est pas sous-multiplicative mais que $n\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative.
3. $\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}(M^T M)}$.

   Montrer que cette norme est sous-multiplicative ▷ **une inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$**. Mais qu'elle n'est pas une norme subordonnée ▷ **calculer $\|I_n\|$**.

1. On sait que tr est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$, donc une forme linéaire. De plus l'application tr est continue car :
   — *(première méthode)* l'*ev* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie et toute application linéaire sur un *ev* de dimension finie est continue ;
   — *(seconde méthode)* pour toute matrice carrée A, $|\mathrm{tr}(A)| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{n} \|A\| = n\|A\|$. Par suite, l'application tr est $n-$lipschitzienne, donc continue. Et n est le meilleur (le plus petit) rapport possible car $|\mathrm{tr}(I_n)| = n \cdot \|I_n\|$. Donc $n = \|\mathrm{tr}\|$.
2. La norme $\|\cdot\|$ n'est pas sous-multiplicative car (voici un contre-exemple), en notant U la matrice carrée dont tous les éléments valent 1 : $\|U\| = 1$ mais $U^2 = nU$, d'où $\|U^2\| = n > 1 \times 1 = \|U\|\ \|U\|$ car $n \geq 2$.

   Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ dans $\mathscr{M}_n$. Notons $C = AB = (c_{i,j})$:
   $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad |c_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\ |b_{k,j}| \leq \|A\|\|B\| \sum_{k=1}^{n} 1 = n\|A\|\|B\|$$
   qui est un majorant. Le maximum étant le plus petit majorant, $\|C\| = \|AB\| \leq n\|A\|\ \|B\|$, c'est-à-dire $n\|AB\| \leq n\|A\|\ n\|B\|$, ce qui signifie que la norme $n\|\cdot\|$ est sous-multiplicative.
3. Par l'absurde : si la norme euclidienne $\|\cdot\|$ est la norme subordonnée à une norme $N : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, alors $\|I_n\| = \sup\limits_{X\neq 0} \frac{N(I_nX)}{N(X)} = 1$. C'est absurde car $\|I_n\| = \sqrt{n} \neq 1$. Mais c'est une norme sous-multiplicative. En effet, soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathscr{M}_n$. Notons $C = AB = (c_{ij})$: alors $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ et $\|AB\|^2 = \|C\|^2 = \sum_{i,j} c_{ij}^2$. Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, $c_{ij}^2 = \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \leq \left(\sum_k a_{ik}^2\right)\left(\sum_k b_{kj}^2\right)$. Donc $\|AB\|^2 \leq \sum_{i,j}\left[\left(\sum_k a_{ik}^2\right)\left(\sum_k b_{kj}^2\right)\right] = \left(\sum_{i,k} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{j,k} b_{kj}^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2$.

Exercice 7 (inégalités de Young, de Hölder & de Minkowski)**.**

Soient deux réels $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient u et v deux réels positifs. Prouver l'inégalité de Young
   $$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$
   de deux manières :
   (a) en étudiant, pour tout $v \geq 0$ fixé, la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ u \mapsto \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} - uv$;
   (b) en utilisant la **concavité** de la fonction ln.
2. Soient deux réels $a < b$ et l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a,b])$.
   (a) Soient F et G deux fonctions positives de E telles que $\int_a^b F^p = \int_a^b G^q = 1$. Montrer que $\int_a^b FG \leq 1$.
   (b) Soient f et g deux fonctions positives de E. Prouver l'inégalité de Hölder
   $$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q\right)^{1/q}.$$
   (c) Examiner le cas particulier où $p = q = 2$.
3. (a) Soient f et g deux fonctions positives de E. En remarquant que $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p/q}$, prouver l'inégalité de Minkowski
   $$\left(\int_a^b (f+g)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p\right)^{1/p}.$$
   (b) Montrer que $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ définit une norme sur l'espace vectoriel E.

   ▷ **Dans le corrigé, on prouve aussi que :** $\|f\|_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.

1. (a) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall u > 0,\ \varphi'(u) = u^{p-1} - v$, d'où le tableau de variations :

u	0		$v^{\frac{1}{p-1}}$		$+\infty$
$\varphi'(u)$	$\|$	$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction φ est ainsi positive, d'où l'inégalité de Young.

(b) Par concavité du logarithme, pour tous $x >$ et $y > 0$, $\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y$. Et par croissance de l'exponentielle, $\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geq x^{1/p}y^{1/q}$. Si $x = u^p$ et $y = v^q$, alors $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ si u et v sont strictemetn positifs. Et, si $u = 0$ ou $v = 0$, cette inégalité reste vraie.

2. (a) De l'inégalité de Young, on déduit que : $\forall t \in [a,b], F(t)G(t) \leq \frac{1}{p}\,[F(t)]^{1/p} + \frac{1}{q}\,[G(t)]^{1/q}$, d'où $\int_a^b FG \leq \frac{1}{p}\int_a^b F^p + \frac{1}{q}\int_a^b G^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ par croissance de l'intégrale.

(b) La fonction g est positive et continue, d'où : si l'intégrale $\int_a^b g^q$ est nulle, alors la fonction g est nulle et l'inégalité de Hölder est donc vraie. De même si l'autre intégrale $\int_a^b f^p$ est nulle.

Si les deux intégrales sont non nulles, alors posons, pour tout $x \in [a,b]$, $F(x) = \dfrac{f(x)}{\left(\int_a^b f^p\right)^{1/p}}$ et $G(x) = \dfrac{g(x)}{\left(\int_a^b g^q\right)^{1/q}}$, de sorte que $\int_a^b F^p = \int_a^b G^q = 1$. On déduit alors de la question précédente que $\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p}\left(\int_a^b g^q\right)^{1/q}$.

(c) Dans le cas où $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder s'écrit $\int_a^b fg \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}$ et vaut pour toutes fonctions f et g positives et continues sur $[a,b]$. Par suite, en remplaçant f par $|f|$ et g par $|g|$, on obtient l'inégalité $\int_a^b |fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}$ qui vaut pour toutes fonctions f et g continues sur $[a,b]$. Enfin, parce que $\left|\int_a^b fg\right| \leq \int_a^b |fg|$, il en résulte l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle a|b\rangle| \leq \|f\|^2\,\|g\|^2$ si on munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ du produit scalaire usuel.

3. (a) Si $\int_a^b (f+g)^p = 0$, alors la fonction $f+g$ est nulle car c'est une fonction continue et positive. Par suite les fonctions f et g sont nulles car elles sont positives. Et l'inégalité de Minkowski s'écrit $0 \leq 0 + 0$.

Sinon $\int_a^b (f+g)^p = \int f(f+g)^{p/q} + \int g(f+g)^{p/q}$. On applique l'inégalité de Hölder au premier terme : $\int f(f+g)^{p/q} \leq \left(\int f^p\right)^{1/p}\left[\int (f+g)^p\right]^{1/q}$. De même pour le second terme : $\int g(f+g)^{p/q} \leq \left(\int g^p\right)^{1/p}\left[\int (f+g)^p\right]^{1/q}$. Par suite $\int_a^b (f+g)^p \leq \left[\left(\int f^p\right)^{1/p} + \left(\int g^p\right)^{1/p}\right]\left[\int (f+g)^p\right]^{1/q}$. On obtient l'inégalité de Minkowski en divisant par $\left[\int (f+g)^p\right]^{1/q}$ qui est strictement positif.

(b) On vérifie les trois axiomes d'une norme :

- la fonction $|f|^p$ est positive et continue, d'où : $\int_a^b |f|^p = 0 \implies |f|^p = 0 \implies f = 0$;
- pour tout réel α, $\int_a^b |\alpha f|^p = |\alpha|^p \int_a^b |f|^p$;
- si f et g sont deux fonctions de E, alors $\int_a^b |f+g|^p \leq \int_a^b (|f|+|g|)^p$ par croissance de l'intégrale. D'où $\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b (|f|+|g|)^p\right)^{1/p}$ car la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Et $\left(\int_a^b (|f|+|g|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$ d'après l'inégalité de Minkowski. On a ainsi prouvé l'inégalité triangulaire.

Remarque — Montrons que, pour toute fonction $f \in E$, $\|f\|_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Si la fonction f est nulle, alors $\|0_E\|_p = 0 \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \|0_E\|_\infty$.

Sinon $\|f\|_\infty$ est le réel $M = \max\limits_{[a,b]}|f| > 0$. Soit ε tel que $M > \varepsilon > 0$:

— d'une part $|f| \leq M$ sur le segment $[a,b]$;
— d'autre part il existe un intervalle de longueur $\eta > 0$ sur lequel $|f| \geq M - \varepsilon$ par continuité de la fonction f.

D'où $\eta(M-\varepsilon)^p \leq \int_a^b |f|^p \leq (b-a)M^p$. Donc $\eta^{1/p}(M-\varepsilon) \leq \|f\|_p \leq (b-a)^{1/p}M$.

D'une part, $\eta^{1/p} = \mathrm{e}^{(\ln\eta)/p}$ tend vers 1 par continuité de la fonction exp, d'où $\eta^{1/p}(M-\varepsilon) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} M - \varepsilon$, donc $M - 2\varepsilon \leq \eta^{1/p}(M-\varepsilon)$ à partir d'un certain rang. D'autre part, $(b-a)^{1/p}M \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} M$, d'où $(b-a)^{1/p}M \leq M + \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

Donc $M - 2\varepsilon \leq \|f\|_p \leq M + \varepsilon$ à partir d'un certain rang. On en déduit que $\|f\|_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} M = \|f\|_\infty$.

Exercice 8 (Séries entières & convergence uniforme)**.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n défini par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Soit $R > 0$. On munit l'*ev* $E = \mathcal{C}([-R, +R])$ de la norme ∞.

1. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'*evn* E. Quelle est sa limite ?
2. L'ensemble des fonctions polynomiales est-il un fermé de l'espace vectoriel normé E ?
3. Montrer que, à partir d'un certain rang N, aucun polynôme P_n ne s'annule sur l'intervalle $[-R, +R]$.

---

1. Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ est infini. Sur le segment $[-R, +R] \subset]-\infty, +\infty[$, cette série entière converge normalement, donc uniformément, vers la fonction $f : [-R, +R] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x$. D'où $\|P_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. L'ensemble F des fonctions polynomiales est une partie de E mais cette partie F n'est pas fermée car la suite de fonctions polynomiales $P_n \in F$ converge (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers la fonction $f \notin F$ (l'exponentielle n'est pas un polynôme car elle n'est pas nulle et elle est sa propre dérivée). Cela contredit la caractérisation séquentielle d'un fermé.
3. Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-R}$. D'après la première question, il existe un entier naturel N tel que :
$$\forall x \in [-R, +R],\ \forall n \geq N, \quad |P_n(x) - \mathrm{e}^x| \leq \varepsilon.$$
Soient $n \geq N$ et $x \in [-R, +R]$: $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - P_n(x) + P_n(x)$, d'où $|\mathrm{e}^x| \leq |\mathrm{e}^x - P_n(x)| + |P_n(x)|$, d'où
$$|P_n(x)| \geq |\mathrm{e}^x| - |\mathrm{e}^x - P_n(x)| \geq \mathrm{e}^{-R} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-R} \geq \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-R} > 0.$$
Donc le polynôme P_n ne s'annule pas sur l'intervalle $[-R, +R]$.

Exercice 9 (*oral Centrale PC 2011*)**.**

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par $\forall f \in E,\ \|f\|_2 = (\int_0^1 f^2)^{1/2}$. Soient

$$\Phi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 f \qquad \text{et} \qquad \Psi\colon f \in E \mapsto \int_0^1 |f|.$$

1. Montrer que, pour tout $f \in E$, $|\Phi(f)| \leq \Psi(f) \leq \|f\|_2$.
2. Les applications Φ et Ψ sont-elles continues de $(E, \|\ \ \|_2)$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in E$: d'une part $|\Phi(f)| \leq \Psi(f)$, d'autre part l'inégalité de Cauchy et Schwarz montre que $\Psi(f) \leqslant \left(\int_0^1 1\right)^{1/2} \times \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$. L'application Φ étant de plus linéaire, on en déduit qu'elle est continue. Quant à l'application Ψ, elle n'est pas linéaire. Montrons qu'elle est 1–lipschitzienne, donc continue :

$$\forall (f, g) \in E^2,\ |\Psi(f) - \Psi(g)| = \left|\int_0^1 |f| - |g|\right| \leqslant \int_0^1 ||f| - |g|| \leqslant \int_0^1 |f - g| = \Psi(f - g) \leqslant \|f - g\|_2.$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{A}_n$, respectivement $\mathcal{S}_n$, le sous-espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétriques, respectivement symétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont fermés.
2. Soint A une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

---

1. L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto M - M^T$ est linéaire sur un *ev* de dimension finie donc elle est continue. D'où $\mathcal{S}_n = \mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}\right)$ est un fermé car c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue ▷ **proposition 50 du chapitre XI**.

   On montre de même que $\mathcal{A}_n$ est un fermé en utilisant l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \mapsto M + M^T$.

2. Soit L la limite de la suite convergente $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   La suite $(A^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$, elle converge donc aussi vers L ▷ **proposition 14 du chapitre XI**. De plus, chaque matrice A^{2k} est symétrique et l'ensemble $\mathcal{S}_n$ est fermé d'après la première question, donc la matrice L est aussi symétrique d'après la caractérisation séquentielle d'un fermé ▷ **proposition 54 du chapitre XI**.

   On montre de même que la matrice Lest antisymétrique car c'est la limite de la suite des matrices A^{2k+1} antisymétriques.

   Or $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{S}_n = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$. Donc la matrice L est nulle.

Exercice 11. 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $A^n = 0$. En déduire que l'ensemble des matrices nilpotentes de taille n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que toute matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables. En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

---

1. Soit une matrice A nilpotente. Il existe alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Par suite il existe $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{p-1}X \neq 0$. Puis on montre que la famille $(X, AX, \cdots, A^{p-1}X)$ de p vecteurs colonnes est libre ▷ **Exercice 34 du chapitre II**. On en déduit que $p \leq n$ car la dimension de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ vaut n. Or $A^p = 0$. D'où $A^n = A^p \cdot A^{n-p} = 0 \cdot A^{n-p} = 0$.

   Réciproquement, si $A^n = 0$, alors A est nilpotente.

   De cette équivalence, on déduit que l'ensemble des matrices nilpotentes est égal à l'image réciproque de l'ensemble $\{0_{\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})}\}$ par l'application $f : \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K}),\ M \mapsto M^n$. Or f est continue car $(\star)$ et $\{0_{\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})}\}$ est un fermé, donc $f^{-1}\left(\{0_{\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})}\}\right)$ est un fermé.

   $(\star)$ f est la composée $g \circ h$ des applications $h : \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})^n,\ M \mapsto (M, \cdots, M)$ et $g : \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K})^n \to \mathscr{M}_{nn}(\mathbb{K}),\ (M_1, \cdots, M_n) \mapsto M_1 \times \cdots \times M_n$ qui sont continues car g est linéaire sur un *ev* de dimension finie et h est multilinéaire sur un *ev* de dimension finie.

2. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, on sait qu'une suite suite de matrices converge si, et seulement si, chacune de ses coordonnées converge. Soit T une matrice triangulaire : ses valeurs propres sont égales à ses éléments diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

   Si ces valeurs impropres sont toutes égales, alors on pose $\varepsilon = 42$. Sinon,

   $$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j|.$$

   Puis on définit, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, une matrice

   $$T_k = T - \operatorname{diag}\left(\frac{\varepsilon}{k}, \frac{\varepsilon}{2k}, \cdots, \frac{\varepsilon}{nk}\right).$$

   La suite (T_k) converge vers T et chaque matrice T_k est diagonalisable car ses valeurs propres sont distinctes deux à deux.

   Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: toute matrice A est donc trigonalisable. Par suite, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $T = P^{-1}AP$ est triangulaire. Or on vient de montrer qu'il existe une suite de matrices diagonalisables T_k qui converge vers T.

   On définit, pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, $A_k = PT_kP^{-1}$. D'une part, chaque matrice A_k est diagonalisable car semblable à la matrice diagonalisable T_k. D'autre part, la suite (A_k) converge vers A. En effet $T_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} T$, d'où $PT_kP^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} PTP^{-1}$ car l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue (comme toutes les applications linéaires sur un *ev* de dimension finie).

Exercice 12. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leur adhérence.

Montrer que :

1. si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$;
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
4. Soit $E = \mathbb{R}$. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $\bar{A} \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

---

1. Hypothèse : $A \subset B$.

   Première méthode : soit $x \in \overline{A}$. Alors $\forall \varepsilon > 0,\ \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

   D'où : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ y \in \mathcal{B}(x, \varepsilon)$. Or $y \in A \implies y \in B$ par hypothèse.

   D'où : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in B,\ y \in \mathcal{B}(x, \varepsilon)$. D'où $x \in \overline{B}$.

   Donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.

   Deuxième méthode : on utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence. Un point a est adhérent à A si, et seulement si, a est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de A.

   Soit $x \in \overline{A}$. Alors x est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de A.

   Or $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in B$ par hypothèse. D'où x est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de B. D'où $x \in \overline{B}$.

   Donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $\star$ Montrons d'abord que : $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Cela résulte de la question précédente car $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

   $\star\star$ Montrons ensuite que : $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Première méthode : soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \varnothing \qquad \heartsuit$$

   — ou bien $x \in \overline{B}$;
   — ou bien $x \notin \overline{B}$. Alors $\exists \varepsilon_0 > 0,\ \mathcal{B}(x, \varepsilon_0) \cap B = \varnothing$.

     D'où $\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap B = \varnothing$.

     Or $\heartsuit$, d'où : $\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,\ \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

     D'où $\forall \varepsilon > 0,\ \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. D'où $x \in \overline{A}$.

   Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Deuxième méthode : soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors x est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de $A \cup B$.
   — ou bien on peut extraire de (u_n) une suite d'éléments de B et alors $x \in \overline{B}$;
   — ou bien à partir d'un certain rang N tous les u_n sont dans A. Alors x est la limite de la suite $(u_n)_{n \geq N}$ dont tous les élements sont dans A. D'où $x \in \overline{A}$.

   Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. Cela résulte de la première question : $A \cap B \subset A$, d'où $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$. De même, $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$. Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
4. Soient $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: alors $\overline{A \cap B} = \varnothing$ mais $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$.

Exercice 13 (inégalité de Bessel & égalité de Parseval)**.**

Soit E un espace préhilbertien et $\| \cdot \|_2$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. Soit x un vecteur de E.

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $F_n = \text{Vect}\left(e_k, k \in [\![0, n]\!]\right)$. Montrer que la suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ est décroissante.
2. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **totale**, *i.e.* $\text{Vect}(\mathrm{e}_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans E. Montrer que la suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ tend vers 0.
3. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **orthonormée**, *i.e.* $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$. Prouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Bessel :

   $$\sum_{k=0}^{n} \langle x | e_k \rangle^2 \leq \|x\|_2^2.$$

   En déduire que la série numérique $\sum \langle x | e_k \rangle^2$ converge.
4. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **orthonormée** et **totale**. Prouver l'égalité de Parseval :

   $$\sum_{k=0}^{\infty} \langle x | e_k \rangle^2 = \|x\|_2^2.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$: $\|x - p_{n+1}(x)\|_2 = \inf_{y \in F_{n+1}} \|x-y\|_2$ d'après le théorème des MOINDRES CARRÉS. Or $F_n \subset F_{n+1}$, d'où $\forall y \in F_n,\ \|x-y\|_2 \geq \|x - p_{n+1}(x)\|_2$ car l'inf est un minorant. En particulier, $p_n(x) \in F_n$, donc $\|x - p_n(x)\|_2 \geq \|x - p_{n+1}(x)\|_2$. La suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ est donc décroissante.
2. Soit $\varepsilon > 0$: la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et un vecteur $y_N \in F_N$ tels que $\|x - y_N\|_2 \leq \varepsilon$. Or $\|x - p_N(x)\|_2 \leq \|x - y_N\|_2$. Et la suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ est décroissante. D'où $\forall n \geq N, \|x - p_n(x)\|_2 \leq \varepsilon$. Donc $\|x - p_n(x)\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. La famille $(e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une *b.o.n.* du sous-espace vectoriel F_n, d'où :
   — d'après le théorème de la PROJECTION ORTHOGONALE, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k$;
   — d'après le théorème de PYTHAGORE, $\|p_n(x)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle x|e_k\rangle^2$.

   Or $\|p_n(x)\|_2^2 \leq \|x\|_2^2$ car, d'après le théorème de PYTHAGORE, $\|x - p_n(x)\|_2^2 + \|p_n(x)\|_2^2 = \|x\|^2$. Donc $\sum_{k=0}^{n} \langle x|e_k\rangle^2 \leq \|x\|_2^2$.

   La suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} \langle x|e_k\rangle^2$ est majorée (par $\|x\|^2$), elle est aussi croissante (car ses termes sont positifs), donc la série numérique $\sum \langle x|e_k\rangle^2$ converge.
4. $\|x\|_2^2 - S_n = \|x\|_2^2 - \|p_n(x)\|_2^2 = \|x - p_n(x)\|_2^2$ d'après le théorème de Pythagore. Or $\|x - p_n(x)\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question 2, d'où $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|^2$. Donc $\sum_{k=0}^{\infty} \langle x|e_k\rangle^2 = \|x\|_2^2$.

Exercice 14 (*Une norme est euclidienne* ssi *elle vérifie l'identité du parallélogramme*)**.**

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Soit $f\ :\ E^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

1. Soient x, y et z trois vecteurs de E. Montrer que :
   (a) $f(x+y,z) + f(x-y,z) = 2f(x,z)$;
   (b) $f(0_E, z) = 0$ et $f(2x,z) = 2f(x,z)$;
   (c) $f(x,z) + f(y,z) = f(x+y,z)$.
2. Montrer que la fonction f est bilinéaire, symétrique, définie et positive

   ▷ **l'exercice 4 de ce TD et le corollaire 36 du chapitre XI**.
3. En déduire qu'il existe un unique produit scalaire tel que $\forall v \in E,\ \langle v|v\rangle = \|v\|^2$.

Voir le corrigé manuscrit.