

EXERCICE 14

Necati Romain
le 11/12/21

$$\begin{aligned}
 1. f(x+y, z) + f(x-y, z) &= \frac{1}{4} (\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2) \\
 &= \frac{1}{4} (\|y+(x+z)\|^2 - \|y+(x-z)\|^2 + \|y-(x+z)\|^2 - \|y-(x-z)\|^2) \\
 &= \frac{1}{4} (2\|y\|^2 + 2\|x+z\|^2 - 2\|y\|^2 - 2\|x-z\|^2) \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{4} (\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2) = 2f(x, z) \quad \heartsuit
 \end{aligned}$$

$$f(0_E, z) = \frac{1}{4} (\|0_E+z\|^2 - \|0_E-z\|^2) = \frac{1}{4} (\|z\|^2 - \|z\|^2) = 0$$

donc $f(2x, z) = f(x+x, z) = 2f(x, z) - f(x-x, z) = 2f(x, z) - f(0_E, z) = 2f(x, z)$

$\Rightarrow f(m+d, z) + f(m-d, z) = 2f(m, z) = f(2m, z) = f(x+y, z)$

$$\begin{aligned}
 f(x, z) + f(y, z) &= \frac{1}{4} (\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) \\
 &= \frac{1}{4} (\|z+x\|^2 + \|z+y\|^2 - (\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2)) \\
 &= \frac{1}{4} (\|z+m+d\|^2 + \|z+m-d\|^2 - (\|z-m-d\|^2 + \|z-m+d\|^2)) \\
 &= \frac{1}{4} (2\|z+m\|^2 + 2\|d\|^2 - (2\|z-m\|^2 + 2\|d\|^2)) \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{4} (\|m+z\|^2 - \|m-z\|^2) = 2f(m, z) = f(2m, z) = f(x+y, z)
 \end{aligned}$$

où $m = \frac{1}{2}(x+y)$ et $d = \frac{1}{2}(x-y)$, de sorte que $m+d = x$, $m-d = y$ et $2m = x+y$.

2. Soit $(x, y) \in E^2$. $f(x, y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4} (\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = f(y, x)$ donc f est symétrique.
 $f(x, x) = \frac{1}{4} (\|2x\|^2 - \|0_E\|^2) = \|x\|^2$ donc f est positive et définie, par définition d'une norme.

Soit $y \in E$. L'application $\varphi: E \rightarrow E, x \mapsto f(x, y)$ est additive d'après 1.c

La norme $\|\cdot\|$ est continue car lipschitzienne sur E .

Donc pour $a \in E$ fixé, $f(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{\|a+y\|^2 - \|a-y\|^2}{4} = f(a, y)$.

Donc l'application φ est additive et continue. D'après l'exercice 4, elle est linéaire.
 Par symétrie, f est bilinéaire.

3. D'après 2, f est bilinéaire, symétrique, définie et positive, donc f est un produit scalaire, vérifiant $f(x, x) = \|x\|^2$ pour tout $x \in E$ d'après 2.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire vérifiant $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = \|x\|^2$,

alors pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

d'où $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 2(\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2)$

d'où $4f(x, y) = 4\langle x, y \rangle$

d'où $f(x, y) = \langle x, y \rangle$, d'où l'unicité de f .

Donc il existe un unique produit scalaire tel que $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = \|x\|^2$.