Colle n° 15

Variables aléatoires & e.v.n.

Exercice 1 (Oral Mines Ponts PSI 2016)**.** Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2a$ boules blanches et a boules noires indiscernables. On effectue une suite de tirages, avec remise, d'une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués lorsqu'on obtient pour la première fois deux boules noires lors de deux tirages consécutifs.

1. Élaborer une relation de récurrence d'ordre 2 satisfaite par la suite $(P(X \geqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que la variable aléatoire X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X, *id est* calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Soit E l'ensemble des fonctions $f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$.

Soient N_1 et N_2 les applications définies de E vers $\mathbb{R}$ par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in E,\ N_2(f) \leq \alpha \cdot N_1(f)$.
3. Montrer que, pour tout $f \in E$,

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x [f(t) + f'(t)]\, \mathrm{e}^t dt.$$

4. En déduire que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 3. On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum |u_n|$ converge, ℓ^2 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum u_n^2$ converge et ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que ℓ^1, ℓ^2 et ℓ^∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et que $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$.
2. On définit sur ℓ^1 trois normes par :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad , \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

pour tout $u \in \ell^1$.

(a) Déterminer, s'il existe, le plus petit réel α tel que $\forall u \in \ell^1,\ \|u\|_\infty \leq \alpha \cdot \|u\|_1$.

(b) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

(c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ? Et les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$?