Colle 15 Espaces vectoriels normés

BOLLET Alexandre

Exercice 1. Soit $r > 0$ et E_r l'ensemble des applications de $]-r, r[$ dans $\mathbb{R}$ développables en série entière. Pour $f \in E_r$, on pose $\psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{x+t} dt$.

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de E_r.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propores de ψ ; ψ est-il un automorphisme de E_r ?
3. Pour un polynôme, on pose $\|P\| = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$; ψ induit-elle une application continue sur $\mathbb{R}[t]$? Son inverse est-elle continue ?

Solution **1.** 1. *On a*

$$\psi(f)(x) = \int_0^1 \frac{f(xu)}{1+u} du,$$

d'où si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ *pour* $y \in]-r, r[$, *on a donc pour* $x \in]-r, r[$:

$$\psi(f)(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n x^n \frac{u^n}{1+u} \right) du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} du$$

vu que $\left| a_n x^n \frac{u^n}{1+u} \right| \leq |a_n x^n|$. *En posant* $I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u} du$, *il vient*

$$\psi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_n x^n.$$

2. *On obtient* $\psi(f) = \lambda f$ *ssi* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n I_n = \lambda a_n$. *On en déduit que les valeurs propres sont* $\{I_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, *les vecteurs propres état proportionnels à* x^n, *donc* ψ *est injective.*

   De plus, ψ *est surjective : si* $g = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, *on pose* $a_n = \frac{b_n}{I_n}$.

3. ψ *est un automorphisme de* $\mathbb{R}[t]$. *De plus, si* $x \in [-1, 1]$, $|\psi(f)(x)| \leq \|f\|$, *donc* ψ *est continue. En revanche,* ψ^{-1} *ne l'est pas. En effet, si* $f_n(x^n$ *et* $\psi^{-1}(f_n)(x) = \frac{x^n}{I_n}$. *On* $\|f_n\| = 1$, *tandis que* (I_n) *tend vers* 0.

VONCK Baptiste

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles : $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

1. Pour $f \in E$, on définit
$$p_1(f) = \left|\int_0^1 f(t)dt\right| + \int_0^1 |f'(t)|dt$$
$$\text{et} \quad p_2(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt$$
Montrer que p_1 et p_2 sont deux normes équivalentes sur E.
On pourra, entre autres, justifier qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\int_0^1 f(t)dt = f(c)$.
2. Soit ϕ une forme linéaire non nulle et positive sur E, ie telle que
$$\forall f \in E, f \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0.$$
Montrer que si $f \in E$, on a $|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty \times \phi(1)$.
3. On pose $p_\phi(f) = |\phi(f)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt$.
Montrer que $\phi(1) > 0$ (où 1 désigne la fonction constante égale à 1) et en déduire que p_ϕ est une norme sur E.
4. Montrer que p_ϕ est équivalente à p_1 et p_2.
5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E telle que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
De plus, on suppose que $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} 2^{-p} f_n\left(\frac{1}{p}\right)$ est convergente.
   (a) Montrer que la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (b) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Solution **2.** 1. ***Montrons que*** p_1 ***et*** p_2 ***sont des normes équivalentes.*** *Les axiomes de normes (séparation, homogénéité, inégalité triangulaire) se vérifient aisément pour* p_1 *et* p_2*. Concentrons-nous sur l'équivalence.*

D'après le théorème de la moyenne, pour tout $f \in E$*, il existe* $c \in [0,1]$ *tel que* $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = f(c)$.

On a $f(c) = f(0) + \displaystyle\int_0^c f'(t)dt$*, donc :*
$$|f(c)| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt = p_2(f)$$
D'où $p_1(f) = |f(c)| + \displaystyle\int_0^1 |f'| \leq p_2(f) + \int_0^1 |f'| \leq 2p_2(f)$.

Inversement, on a $f(0) = f(c) - \displaystyle\int_0^c f'(t)dt$*. Donc :*
$$|f(0)| \leq |f(c)| + \int_0^1 |f'| = \left|\int_0^1 f\right| + \int_0^1 |f'| = p_1(f)$$

Par suite, $p_2(f) = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'| \leq p_1(f) + \int_0^1 |f'| \leq 2p_1(f)$.

On a bien l'équivalence : $\frac{1}{2}p_1 \leq p_2 \leq 2p_1$.

2. ***Majoration de*** $\phi(f)$***.*** *Soit* $f \in E$*. On a l'encadrement* $-\|f\|_\infty \cdot 1 \leq f \leq \|f\|_\infty \cdot 1$*. Par positivité de la forme linéaire* ϕ*, on conserve l'ordre :*

$$-\|f\|_\infty \phi(1) \leq \phi(f) \leq \|f\|_\infty \phi(1)$$

Ce qui donne bien $|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty \times \phi(1)$.

3. p_ϕ ***est une norme.*** *Comme* ϕ *est non nulle, il existe* $g \in E$ *tel que* $\phi(g) \neq 0$*. D'après l'inégalité précédente,* $|\phi(g)| \leq \|g\|_\infty \phi(1)$*, ce qui impose* $\phi(1) \neq 0$*. Comme* ϕ *est positive et* $1 \geq 0$*, on a* $\phi(1) \geq 0$*, donc finalement* $\phi(1) > 0$.

   Vérifions l'axiome de séparation (les autres sont immédiats). Soit $f \in E$ *telle que* $p_\phi(f) = 0$*. Alors* $\displaystyle\int_0^1 |f'| = 0$*, donc* $f' = 0$ *(fonction continue positive d'intégrale nulle), ce qui implique que* f *est constante, disons* $f = a$*. On a aussi* $|\phi(f)| = 0$*, soit* $\phi(a \cdot 1) = a\phi(1) = 0$*. Comme* $\phi(1) \neq 0$*, on a* $a = 0$*, donc* $f = 0$.

4. ***Équivalence de*** p_ϕ ***avec*** p_2 ***(et donc*** p_1***).***

   Sens 1 : Pour tout $x \in [0,1]$*,* $f(x) = f(0) + \int_0^x f'$*, donc* $|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'| = p_2(f)$*. Ainsi* $\|f\|_\infty \leq p_2(f)$*. En utilisant la question 2 :* $|\phi(f)| \leq \phi(1)\|f\|_\infty \leq \phi(1)p_2(f)$*. Donc* $p_\phi(f) = |\phi(f)| + \int |f'| \leq (\phi(1)+1)p_2(f)$.

   Sens 2 :

   — *Si* f *s'annule en un point* $c \in [0,1]$*, alors* $f(0) = -\int_0^c f'$*, d'où* $|f(0)| \leq \int_0^1 |f'| \leq p_\phi(f)$*. On a alors* $p_2(f) \leq 2p_\phi(f)$.

   — *Si* f *ne s'annule pas, par continuité, elle garde un signe constant. Quitte à considérer* $-f$*, supposons* $f > 0$*.* f *atteint son minimum en un point* $a \in [0,1]$ *: pour tout* t*,* $f(t) \geq f(a) > 0$*. Par croissance de* ϕ *:* $\phi(f) \geq \phi(f(a)) = f(a)\phi(1)$*. Donc* $0 < f(a) \leq \frac{\phi(f)}{\phi(1)} = \frac{|\phi(f)|}{\phi(1)}$*. Or* $|f(0)| \leq |f(a)| + \left|\int_a^0 f'\right| \leq \frac{p_\phi(f)}{\phi(1)} + \int_0^1 |f'|$*. Ainsi :*

$$p_2(f) \leq \frac{p_\phi(f)}{\phi(1)} + 2\int_0^1 |f'| \leq \left(2 + \frac{1}{\phi(1)}\right) p_\phi(f)$$

   Dans tous les cas, on a bien l'équivalence.

5. (a) *Posons* $\psi : f \mapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} f(1/p)$*. C'est une forme linéaire bien définie (car* f *bornée) et positive.*

   De plus $\psi(1) = 1 > 0$*. D'après les questions précédentes,* p_ψ *est une norme équivalente à* p_2*.*

   L'hypothèse que (f_n') *converge uniformément implique que* $\int_0^1 |f_n' - f_m'| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$.

   L'hypothèse que (u_n) *converge implique que* $|\psi(f_n - f_m)| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$.

   Par équivalence : Or $p_2(f_n - f_m) = |f_n(0) - f_m(0)| + \int |f_n' - f_m'|$*. On en déduit que* $|f_n(0) - f_m(0)| \to 0$*. On fixe* m *; la suite réelle* $(f_n(0))$ *est bornée, donc admet une sous-suite convergente vers* l*. Mais alors* $|f_m(o) - l|$ *tend vers* 0*, donc* $f_m(0)$ *converge..*

   (b) *La suite* (f_n') *converge uniformément vers une fonction* g*. La suite* $(f_n(0))$ *converge vers un réel* y_0*. D'après le théorème fondamental de l'analyse (ou théorème de dérivation limite), la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $[0,1]$ *vers la fonction* f *définie par* $f(x) = y_0 + \int_0^x g(t)dt$.

6. *Question subsidiaire. Pour* $\sup \frac{p_1}{p_2}$*, on a vu la majoration par 2. On l'atteint asymptotiquement avec* $f_n(t) = 1 - (1-t)^n$ *(fonction qui vaut 0 en 0 mais dont l'aire tend vers 1 et l'intégrale de la dérivée vaut 1). Pour* $\sup \frac{p_2}{p_1}$*, majoration par 2. On l'atteint asymptotiquement avec* $f_n(t) = (1-t)^n$ *(fonction qui vaut 1 en 0, aire tend vers 0, intégrale dérivée vaut 1). Dans les deux cas, le sup est* 2.

LE QUERE Léandre

Exercice 3. Soit $E = C^1([0,1),\mathbb{R})$.

1. Montrer que sur E, les applications $N_1 : f \to |f(0)| + \sup\limits_{[0,1]}|f + 2f'|$ et $N_2 : f \to \sup\limits_{[0,1]}|f| + \sup\limits_{[0,1]}|f'|$ sont deux normes équivalentes.
2. Sont-elles équivalentes à la norme de la convergence uniforme ?

Solution **3.** Il est clair que ce sont des normes et que $N_1 \leqslant 2N_2$

1. *Montrons l'autre inégalité.*
   Posons $g = f + 2f'$. *Donc* $\left(2f\, e^{t/2}\right)' = g(t)\, e^{t/2}$, *ou encore*

$$f(t) = \frac{1}{2} \times e^{-t/2} \times \int_0^t g(x)e^{x/2}\, dx + f(0)$$

   On en déduit que

$$\sup_{[0,1]}|f| \leq \sup_{[0,1]}|g| \times \sup_{[0,1]}\left[e^{-t/2} \times \int_0^t \frac{1}{2}e^{x/2}\, dx\right] + |f(0)| \leq N_1(f).$$

   Par ailleurs, $f' = \frac{1}{2}(g - f)$, *donc*

$$\sup_{[0,1]}|f'| \leq \frac{1}{2}\left(\sup_{[0,1]}|g| + \sup_{[0,1]}|f|\right) \leq N_1(f)$$

   Ainsi $N_2(f) \leqslant 2N_1(f)$ *et les deux normes sot équivalentes.*

2. *Elles ne sont pas équivalentes à* N_∞ *car, si on prend* $f_n : x \to exp(nx)$, *alors* $N_2(f_n) = (n{+}1)exp(n)$ *alors que* $N_\infty(f_n) = exp(n)$. *Donc,* $\lim_{+\infty}(N_2(f_n)/N\infty(f_n)) = +\infty$.