

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 14

Séries entières & variables aléatoires

Exercice 1. Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-n} \cos(n^2 x)$.

1. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est \mathcal{C}^{∞} et que

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \cos(n^2 x) \quad \text{et} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k+2} e^{-n} \sin(n^2 x)$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ ▷ **corollaire 19 du chapitre VII.**

2. En déduire que le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ de la fonction f est nul.

Voir le corrigé manuscrit ci-dessous

Exercice 2 (tiré de MINES PONTS MATHS 2 PC 2017).

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue $n + 1$ tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, alors $X = 5$. Pour modéliser cette expérience aléatoire, on introduit l'univers $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^{n+1}$.

1. Soit $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$: montrer que l'événement $(X = k)$ n'est pas vide et que sa probabilité $P(X = k)$ n'est pas nulle.
2. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $P(X > k) \neq 0$ et :

$$P(X > k + 1) = P(X > k + 1 | X > k) \cdot P(X > k).$$

3. Pour chaque $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, déterminer $P(X > k + 1 | X > k)$.
4. En déduire $P(X > k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Il y a équiprobabilité, d'où $P(X = k) = \frac{\text{Card}(X=k)}{\text{Card}(\Omega)}$. Or l'événement $(X = k)$ n'est pas vide car le résultat $(1, 2, \dots, k - 1, 1, \dots, 1)$ appartient à cet événement, d'où $\text{Card}(X = k) \neq 0$, donc $P(X = k) \neq 0$.

2. L'événement $(X = n + 1)$ est inclus dans $(X > k)$, d'où (par croissance de la proba) $P(X > k) \geq P(X = n + 1)$ qui est strictement positif d'après la première question.

Les événements $(X > k + 1)$ et $(X > k) \cap (X > k + 1)$ sont égaux, d'où $P(X > k + 1) = P[(X > k) \cap (X > k + 1)] = P(X > k) \cdot P(X > k + 1 | X > k)$ d'après la formule des probabilités composées.

3. Calculons $P_{(X>k)}(X > k + 1)$. On sait que $(X > k)$, donc on a tiré k boules distinctes deux à deux lors des k premiers tirages. L'événement $(X > k + 1)$ est réalisé si, et seulement si, on tire une $(k + 1)$ -ième boule différente des k premières. Par équiprobabilité, $P_{(X>k)}(X > k + 1) = \frac{n-k}{n}$.

4. $P(X > k) = P(X > 1) \times \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n}$. Or $(X > 1) = \Omega$, d'où $P(X > 1) = 1$. Et $\prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \frac{1}{n^{k-1}} \prod_{i=n-1}^{n-k+1} i = \frac{1}{n^{k-1}} \frac{(n-1)!}{(n-k)!}$.
Donc $P(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}$.

Exercice 3. Ils sont n joueurs ($n > 2$) à jouer une partie à pile ou face en jetant chacun une pièce. L'un d'entre eux gagne la partie si sa pièce donne un résultat différent des $n - 1$ autres. On joue jusqu'à ce qu'apparaisse le premier gagnant ; soit X le nombre de parties alors jouées. Calculer, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = k)$. Étudier l'espérance et la variance de X .

Voir le corrigé manuscrit.

Exercice 4Soit $N \in \mathbb{N}$.* les fonctions f_n sont de classe C^N sur \mathbb{R} * Pour tout $k \in [0, N-1]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ est sur \mathbb{R} car (1)* La série de fonctions $\sum f_n^{(N)}$ est sur \mathbb{R} car (2)donc la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe C^∞

$$\text{et } \forall x, f^{(2k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \cos(n^2 x)$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k+2} e^{-n} \sin(n^2 x)$$

Ceci est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$ donc f est C^∞ Oui

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2} n^{2k} e^{-n}$$

et $0 \leq n^{2k} e^{-n} = \underset{n \rightarrow \infty}{\circ} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la somme $\sum \frac{1}{n^2}$ convergedonc $\forall k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ est sur \mathbb{R} (1) donc $\forall k \in [0, N-1]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ est sur \mathbb{R} (2) donc la série de fonctions $\sum f_n^{(N)}$ est sur \mathbb{R} • Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k+1)}(x) = 0$$

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n}$$

$$\text{or } \left| \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!} \right| \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2k}$$

$$\frac{1}{2k} (2k)^{-2k} e^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n}$$

car d'après la formule de Stirling $(2k)! \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2k}{e}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}$

$$\text{or } \frac{|z_k|^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} e^{-2k} (2k)^{-2k} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \geq \frac{|z_k|^{4k}}{\sqrt{4\pi k}} e^{-2k} (2k)^{-2k} (2k)^{4k} e^{-2k}$$

$$\geq \frac{(2k)^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} |z_k|^k$$

$$\text{or } \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \exp(2k(\ln(|z_k|) + \ln(|x_1|))) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$, la série $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ diverge

• Pour $x = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$ donc ex

donc le rayon de cv de la S.E. $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est 0

ou

Merci à Paul ?

Seconde méthode

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{x^k f(c, n)^k}{(2n)^k} \right|_{n=0} \leq e^{-nk} \leq e^{-4k} \text{ si } |x| < R \\ \left| \frac{x^k f(c, n)^k}{(2n)^k} \right| \geq \left(\frac{|x|^k 4^{nk}}{2^k n^k} \right)^k = \left(\frac{|x| 4^{nk}}{2^k k!} \right)^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty \end{array} \right.$$

On peut voir que la somme de tous les termes de la somme est infinie, donc la série diverge.

Ensuite, lorsque $n \rightarrow +\infty$, le rayon de convergence R est nul.

On

Exercice 3:

Merci à Baptiste S.

Les lancers sont des épreuves de Bernoulli indépendantes

Ainsi la variable aléatoire Q comptant le nombre de lancers donnant pile sur durant une partie suit une loi de Bernoulli de paramètres $n, \frac{1}{2}$

α

$$\text{Donc } Q \sim B(n, \frac{1}{2})$$

On pose l'événement G "Il y a un gagnant durant une partie ="

Ainsi $G = \{Q=1\} \cup \{Q=n-1\}$ et cette union est disjointe

$$\begin{aligned}\text{donc } P(G) &= P(Q=1) + P(Q=n-1) \\ &= \binom{n}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \binom{n}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\Delta \text{ où } P(G) = n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On note $p = P(G) = m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$

Où: Les parties sont des épreuves de Bernoulli indépendantes de succès "Il y a un gagnant durant la partie" de probabilité p .
Donc la r.v. X suit une loi géométrique

$$X \sim G(p) \quad \text{donc} \quad X \in \mathbb{N} \rightarrow [$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = \left(1 - m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\right)^{k-1} \times m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}$$

$$\text{et} \quad \boxed{E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}}$$

$$\text{et} \quad \boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{m^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}}}$$