

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 14

Séries entières & variables aléatoires

Exercice 1. Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-n} \cos(n^2 x)$.

1. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est \mathcal{C}^∞ et que

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \cos(n^2 x) \quad \text{et} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k+2} e^{-n} \sin(n^2 x)$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ ▷ **corollaire 19 du chapitre VII.**

2. En déduire que le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ de la fonction f est nul.

Voir le corrigé manuscrit ci-dessous

Exercice 2 (tiré de MINES PONTS MATHS 2 PC 2017).

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue $n + 1$ tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, alors $X = 5$. Pour modéliser cette expérience aléatoire, on introduit l'univers $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^{n+1}$.

- Soit $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$: montrer que l'événement $(X = k)$ n'est pas vide et que sa probabilité $P(X = k)$ n'est pas nulle.
- Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $P(X > k) \neq 0$ et :

$$P(X > k+1) = P(X > k+1 | X > k) \cdot P(X > k).$$

- Pour chaque $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, déterminer $P(X > k+1 | X > k)$.
- En déduire $P(X > k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Il y a équiprobabilité, d'où $P(X = k) = \frac{\text{Card}(X=k)}{\text{Card}(\Omega)}$. Or l'événement $(X = k)$ n'est pas vide car le résultat $(1, 2, \dots, k-1, 1, \dots, 1)$ appartient à cet événement, d'où $\text{Card}(X = k) \neq 0$, donc $P(X = k) \neq 0$.
- L'événement $(X = n+1)$ est inclus dans $(X > k)$, d'où (par croissance de la proba) $P(X > k) \geq P(X = n+1)$ qui est strictement positif d'après la première question.

Les événements $(X > k+1)$ et $(X > k) \cap (X > k+1)$ sont égaux, d'où $P(X > k+1) = P[(X > k) \cap (X > k+1)] = P(X > k) \cdot P(X > k+1 | X > k)$ d'après la formule des probabilités composées.

- Calculons $P_{(X > k)}(X > k+1)$. On sait que $(X > k)$, donc on a tiré k boules distinctes deux à deux lors des k premiers tirages. L'événement $(X > k+1)$ est réalisé si, et seulement si, on tire une $(k+1)$ -ième boule différente des k premières. Par équiprobabilité, $P_{(X > k)}(X > k+1) = \frac{n-k}{n}$.

- $P(X > k) = P(X > 1) \times \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n}$. Or $(X > 1) = \Omega$, d'où $P(X > 1) = 1$. Et $\prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \frac{1}{n^{k-1}} \prod_{i=n-1}^{n-k+1} i = \frac{1}{n^{k-1}} \frac{(n-1)!}{(n-k)!}$.

$$\text{Donc } P(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}.$$

Exercice 3. Ils sont n joueurs ($n > 2$) à jouer une partie à pile ou face en jetant chacun une pièce. L'un d'entre eux gagne la partie si sa pièce donne un résultat différent des $n-1$ autres. On joue jusqu'à ce qu'apparaisse le premier gagnant ; soit X le nombre de parties alors jouées. Calculer, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = k)$. Étudier l'espérance et la variance de X .

Voir le corrigé manuscrit.

Exercice 4Soit $N \in \mathbb{N}$.* les fonctions f_n sont de classe C^N sur \mathbb{R} * Pour tout $k \in [0, N-1]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ cvs sur \mathbb{R} car (1)* la série de fonctions $\sum f_n^{(N)}$ CVU sur \mathbb{R} car (2)donc la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe C^N

$$\text{et } \forall x, f^{(2k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \cos(n^2 x)$$

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k+2} e^{-n} \sin(n^2 x)$$

Ceci est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$ donc f est C^∞

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2} n^{2k} e^{-n}$$

$$\text{et } 0 \leq n^{2k} e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et la série } \sum \frac{1}{n^2} \text{ cv}$$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ CVU sur \mathbb{R} (1) donc $\forall k \in [0, N-1]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ cvs sur \mathbb{R} (2) donc la série de fonctions $\sum f_n^{(N)}$ CVU sur \mathbb{R} **Première méthode:*** Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(2k+1)}(0) = 0$$

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n}$$

$$\text{or } \left| \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} (2k)^{-2k} e^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n}$$

$$\text{car d'après la formule de Stirling } (2k)! \sim \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \sqrt{4\pi k}$$

$$\text{or } \frac{|x|^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} e^{-2k} (2k)^{-2k} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \geq \frac{|x|^{4k}}{\sqrt{4\pi k}} e^{-2k} (2k)^{-2k} (2k)^{4k} e^{-2k}$$

$$\geq \frac{(2k)^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} |x|^{2k}$$

$$\text{or } \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \exp(2k(2\ln(2k) + \ln(|x|))) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left| \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$, la série $\sum \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$ diverge

• Pour $x=0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$ dans cv

donc le rayon de cv de la s.e. $\sum \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est 0

on

Merci Paul ?

Seconde méthode

$$\left| \frac{z^k (r-1)^k}{(2k)!} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{r}{2} \frac{z^n}{k}} \right| \geq \frac{|z|^k}{(2k)!} e^{-\frac{r}{2} \frac{|z|^k}{k}} \quad \text{tous les termes de la somme étant positifs}$$
$$\geq \frac{|z|^k}{(2k)!} e^{-\frac{r}{2} \frac{|z|^k}{k}} \geq \left(\frac{|z| \frac{r^{\frac{1}{k}}}{2^{\frac{1}{k}}}}{2^{\frac{1}{k}} e^{\frac{r}{2}}} \right)^k \geq \left(\frac{|z| \frac{r^{\frac{1}{k}}}{2^{\frac{1}{k}}}}{e^{\frac{r}{2}}} \right)^k$$

$\frac{r^{\frac{1}{k}}}{2^{\frac{1}{k}}} |z|$ et k tendent vers $+\infty$. ~~Donc~~ Donc, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ diverge grossièrement. Ceci étant vrai quel que soit a , la série de Taylor $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ diverge à un rayon de convergence nul.

Oui

Exercice 3:

Merlin Baptiste S.

Les lancers sont des épreuves de Bernoulli indépendantes

Ainsi la variable aléatoire Q comptant le nombre de lancers α donnant pile ~~sur~~ devant une partie est suit une loi de Bernoulli α de paramètres $n, \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } Q \sim B(n, \frac{1}{2})$$

On pose l'événement G "Il y a un gagnant devant une partie"

Ainsi $G = (Q=1) \cup (Q=n-1)$ et cette union est disjointe

$$\begin{aligned} \text{donc } P(G) &= P(Q=1) + P(Q=n-1) \\ &= \binom{n}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \binom{n}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\Delta \text{ où } P(G) = n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On note $p = P(G) = m \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1}$

ou: Les parties sont des épreuves de Bernoulli indépendantes de succès "il y a un gagnant durant la partie" de probabilité p .
Donc la v.v. X suit une loi géométrique

$X \sim G(p)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = \left(1 - m \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} \right)^{k-1} \times m \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1}$

et $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{m \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1}}$

et $V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - m \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1}}{m^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{2m-2}}$