Kdo du 2/02/2026

E.v.n.

Exercice (distance d'un vecteur à un ensemble)**.**

Soit A une partie non vide d'un *evn* E. Pour tout vecteur $x \in E$, on appelle *distance de x à A* et on note $d(x, A)$ le réel

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

1. Justifier que le réel $d(x, A)$ est bien défini.
2. Montrer que la distance de x à A est nulle si, et seulement si, x est adhérent à A, *i.e.*

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}.$$

3. Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que : $\forall a \in A,\ d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - a\|$. En déduire que :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

Qu'en déduire sur l'application $x \mapsto d(x, A)$?

4. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \left\{x \in E \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}$.
   (a) Montrer que l'ensemble A_n est un ouvert de E et déterminer l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.
   (b) En déduire que tout fermé de E est une intersection dénombrable d'ouverts. Et que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.
5. On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. Soit A l'ensemble des fonctions f de E telles que :

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f(t)dt = 1.$$

   (a) Montrer que l'ensemble A est un fermé de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
   (b) Montrer que la distance de la fonction nulle à l'ensemble A est égale à 1 : $d(0, A) = 1$.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in A$ telle que $d(0, A) = \|f - 0\|_\infty$ (autrement dit : montrer que cet *inf* n'est pas un *min*).