Corrigé de la colle n° 14

Séries entières & variables aléatoires

Exercice 1. Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n}\cos(n^2 x)$.

1. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^\infty$ et que

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k}\mathrm{e}^{-n}\cos(n^2x) \quad \text{et} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} n^{4k+2}\mathrm{e}^{-n}\sin(n^2x)$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ ▷ **corollaire 19 du chapitre VII**.

2. En déduire que le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ de la fonction f est nul.

Voir le corrigé manuscrit ci-dessous

Exercice 2 (tiré de Mines Ponts Maths 2 PC 2017)**.**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, alors $X = 5$. Pour modéliser cette expérience aléatoire, on introduit l'univers $\Omega = [\![1, n]\!]^{n+1}$.

1. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$: montrer que l'événement $(X = k)$ n'est pas vide et que sa probabilité $P(X = k)$ n'est pas nulle.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(X > k) \neq 0$ et :
$$P(X > k+1) = P(X > k+1 | X > k) \cdot P(X > k).$$
3. Pour chaque $k \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer $P(X > k+1 | X > k)$.
4. En déduire $P(X > k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

---

1. Il y a équiprobabilité, d'où $P(X = k) = \frac{\mathrm{Card}(X=k)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$. Or l'événement $(X = k)$ n'est pas vide car le résultat $(1, 2, \cdots, k-1, 1, \cdots, 1)$ appartient à cet événement, d'où $\mathrm{Card}(X = k) \neq 0$, donc $P(X = k) \neq 0$.
2. L'événement $(X = n+1)$ est inclus dans $(X > k)$, d'où (par croissance de la proba) $P(X > k) \geq P(X = n+1)$ qui est strictement positif d'après la première question.

   Les événements $(X > k+1)$ et $(X > k) \cap (X > k+1)$ sont égaux, d'où $P(X > k+1) = P\left[(X > k) \cap (X > k+1)\right] = P(X > k) \cdot P(X > k+1 | X > k)$ d'après la formule des probabilités composées.
3. Calculons $P_{(X>k)}(X > k+1)$. On sait que $(X > k)$, donc on a tiré k boules distinctes deux à deux lors des k premiers tirages. L'événement $(X > k+1)$ est réalisé si, et seulement si, on tire une $(k+1)$–ième boule différente des k premières. Par équiprobabilité, $P_{(X>k)}(X > k+1) = \frac{n-k}{n}$.
4. $P(X > k) = P(X > 1) \times \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n}$. Or $(X > 1) = \Omega$, d'où $P(X > 1) = 1$. Et $\prod_{i=1}^{k-1}\frac{n-i}{n} = \frac{1}{n^{k-1}}\prod_{i=n-1}^{n-k+1} i = \frac{1}{n^{k-1}}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$.

   Donc $P(X > k) = \dfrac{n!}{n^k(n-k)!}$.

Exercice 3. Ils sont n joueurs ($n > 2$) à jouer une partie à pile ou face en jetant chacun une pièce. L'un d'entre eux gagne la partie si sa pièce donne un résultat différent des $n-1$ autres. On joue jusqu'à ce qu'apparaisse le premier gagnant ; soit X le nombre de parties alors jouées. Calculer, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = k)$. Étudier l'espérance et la variance de X.

Voir le corrigé manuscrit.

Révision thème 1

Exercice 4

Soit $N \in \mathbb{N}$.

* Les fonctions f_n sont de classe C^N sur $\mathbb{R}$
* Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ CVS sur $\mathbb{R}$ car (1)
* La série de fonctions $\sum f_n^{(N)}$ CVU sur $\mathbb{R}$ car (2)

donc la série de fonctions $\sum f_n$ est de classe C^N

et $$\boxed{\begin{aligned} \forall x,\ f^{(2k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(2k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \cos(n^2 x) \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k+2} e^{-n} \sin(n^2 x) \end{aligned}}$$

Ceci est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$ donc f est C^∞

Oui

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n^{(k)}(x)| \leq n^{2k} e^{-n}$

et $0 \leq n^{2k} e^{-n} \underset{n \to \infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ cv

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ CVN sur $\mathbb{R}$

(1) donc $\forall k \in [\![0, N-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ CVS sur $\mathbb{R}$

(2) donc la série de fonctions $\sum f_n^{(N)}$ CVU sur $\mathbb{R}$

Première méthode :

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(2k+1)}(0) = 0$$
$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n}$$

or $\left|\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\right| |x|^{2k} \underset{k \to \infty}{\sim} \frac{|x|^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} (2k)^{-2k} e^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n}$

car d'après la formule de Stirling $(2k)! \underset{k \to \infty}{\sim} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \sqrt{4\pi k}$

$$\text{or } \frac{|2x|^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} e^{2k} (2k)^{-2k} \sum_{n=0}^{\infty} n^{4k} e^{-n} \geq \frac{|2x|^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} e^{2k} (2k)^{-2k} (2k)^{4k} e^{-2k}$$

$$\geq \frac{(2k)^{2k}}{\sqrt{4\pi k}} |x|^{k}$$

$$\text{or } \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \exp\left(2k\left(2\ln(2k) + \ln(|x|)\right)\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left| \frac{f_n^{(k)}(0)}{2k!} x^{2k} \right| \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$, la série $\sum \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$ dv grossièrement

- Pour $x = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0)$ donc cv

donc $\boxed{\text{le rayon de cv de la S.E } \sum \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ est } 0}$

Oui.

Merci à Paul P.

Seconde méthode

$$\left|\frac{x^k(-1)^k}{(2k)!}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}n^{4k}\right| \geq \frac{|x|^k}{(2k)!}\, e^{-4k}\, 4k^{4k}$$, tous les termes de la somme étant positifs

$$\geq \frac{|x|^k}{(2k)^{2k}}\, e^{-4k}4k^{4k} \geq \left(\frac{|x|\, 4^4 k^4}{2^2 e^4 k^2}\right)^k \geq \left(\frac{|x|\, 64 k^2}{e^4}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$, car

$\frac{64k^2}{e^4} \geq |x|$ et k tendent vers $+\infty$. ~~Donc, la~~ Donc, la série $\sum \frac{x^k f^{(k)}(0)}{k!}$ diverge grossièrement. Ceci étant vrai quelque soit $x \neq 0$, la série de Taylor $\sum x^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ~~diverge~~ a un rayon de convergence nul.

Oui

Exercice 3:

Merci à Baptiste S.

Les lancers sont des épreuves de Bernoulli indépendantes

Ainsi la variable aléatoire Q comptant le nombre de lancers donnant pile ~~sur~~ durant une partie ~~est~~ suit une loi de Bernoulli de paramètres $n, \frac{1}{2}$

Donc $Q \sim B(n, \frac{1}{2})$

On pose l'événement G "Il y a un gagnant durant une partie"

Ainsi $G = (Q=1) \cup (Q=n-1)$ et cette union est disjointe

donc
$$\begin{aligned} P(G) &= P(Q=1) + P(Q=n-1) \\ &= \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \binom{n}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} \\ &= 2\,\frac{1}{2}\,n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

D'où $P(G) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

On note $p = P(G) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Or : Les parties sont des épreuves de Bernoulli indépendantes de succès "Il y a un gagnant durant la partie" de probabilité p

Donc la v.a X suit une loi géométrique

$$X \sim G(p) \quad \text{donc} \quad \begin{cases} X(\Omega) = [\![1, +\infty[\![\\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(X=k) = (1-p)^{k-1} p \end{cases}$$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(X=k) = \left(1 - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^{k-1} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

et $\boxed{E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}$

et $\boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}}}$