Feuille de T.D. n° 12

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Exercice 1. Soient un espace euclidien E et une application f de E vers E. On dit que f :
— conserve la distance si $\forall (u,v) \in E^2, \quad \|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$;
— conserve le produit scalaire si $\forall (u,v) \in E^2, \quad \langle f(u) | f(v) \rangle = \langle u | v \rangle$.

1. Montrer que f conserve le produit scalaire si, et seulement si, $f(0_E) = 0_E$ et f conserve la distance.
2. Donner un exemple d'application f qui conserve la distance mais telle que $f(0_E) \neq 0_E$.

Exercice 2. Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E.

1. Montrer que toute valeur propre réelle de u appartient à $\{-1; +1\}$.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux.
3. Soient F et G deux *sev* de E. Montrer que : si $F \perp G$, alors $u(F) \perp u(G)$.
4. Soit F un *sev* de E. Montrer que $u(F^{\perp}) = (u(F))^{\perp}$.

Exercice 3. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}\, u)^{\perp}.$$

Exercice 4. Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée. (Revoir les deux méthodes de ▷ **l'exo 2 de la colle n° 7** et tenter une troisième méthode utilisant le théorème spectral.)

Exercice 5.

1. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Soient λ_{min} la plus petite valeur propre de u et λ_{max} la plus grande. Montrer que :
$$\forall x \in E, \ \lambda_{min} \langle x | x \rangle \leq \langle x | u(x) \rangle \leq \lambda_{max} \langle x | x \rangle.$$
2. Soit une matrice symétrique $S = (s_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soient λ_{min} la plus petite valeur propre de S et λ_{max} la plus grande. Montrer que : $\forall i \in [\![1, n]\!], \ \lambda_{min} \leq s_{ii} \leq \lambda_{max}$.
3. Soient deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient α et β les plus grandes valeurs propres de $A^T \cdot A$ et de $B^T \cdot B$ respectivement. Montrer que :
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(AB), \quad \lambda^2 \leq \alpha \cdot \beta.$$

Exercice 6. **▷ exo 3 du TD n° 12.** Soit E un espace euclidien, u un vecteur de E tel que $||u|| = 1$.
Pour chaque réel α, on définit l'endomorphisme φ_α par :

$$\forall x \in E,\ \varphi_\alpha(x) = x + \alpha\langle x, u\rangle u.$$

1. Montrer que φ_α est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. Montrer que l'endomorphisme φ_α est une isométrie vectorielle si, et seulement si, $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$. Reconnaître l'endomorphisme φ_α dans ces deux cas.

Exercice 7 (Matrices symétriques positives)**.** Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice B^TB est une matrice symétrique positive, *i.e.* $B^TB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Soit A une matrice symétrique, *i.e.* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si, et seulement si, elle est positive et inversible.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Et que cette matrice B est unique. On l'appelle la **racine carrée** de A.

Exercice 8. Soient E un espace euclidien, λ un réel et f une isométrie vectorielle de E telle que $(f - \lambda \mathrm{id}_E)^2 = 0$.

1. Montrer que $(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E))^\perp$ est stable par f.
2. En déduire que $(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E))^\perp = \{0_E\}$.
3. Conclure que $f = \pm \mathrm{id}_E$.

Exercice 9. Écrire la matrice, dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe dirigé et orienté par $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Exercice 10 (tiré de CCINP 2019 TSI Math 2)**.**

On munit l'espace vectoriel $E = S_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 symétriques du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^TB)$.

1. Un cas particulier —

   Montrer que l'application f qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, associe la matrice

   $$f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$$

   est une rotation de E qui conserve la trace et le déterminant : $f \in SO(E)$ et $\forall M \in E$, $\mathrm{tr}\, f(M) = \mathrm{tr}\, M$ et $\det f(M) = \det M$.

   Déterminer les sous-espaces propres de f.
2. Le cas général —

   Soit f une isométrie de E laissant invariante la matrice identité : $f \in O(E)$ et $f(I_2) = I_2$. Montrer que f conserve la trace et le déterminant.

Exercice 11 (Endomorphismes normaux)**.** Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que

$$u \circ u^* = u^* \circ u.$$

(On dit d'un tel endomorphisme qu'il est **normal**.)

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$.
2. En déduire que u et u^* ont les mêmes spectre et sous-espaces propres.
3. Montrer que, si un *sev* F est stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u.
4. On suppose que $\dim E = 2$. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint ou la composée d'une homothétie et d'une rotation.

Exercice 12 (Le produit vectoriel)**.** Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3.

1. Soient deux vecteurs $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k} \in E$ et $\vec{w} = w_1\vec{\imath} + w_2\vec{\jmath} + w_3\vec{k} \in E$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\vec{a} \in E$ tel que : $\quad \forall \vec{u} \in E,\ \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{a}$.

Ce vecteur est noté $\vec{v} \wedge \vec{w}$ et est appellé le **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2. Montrer que : $\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{\imath} + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{\jmath} + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{k}$.
3. À quelle condition le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est-il nul ? Cette condition est-elle nécessaire ? suffisante ?
4. Montrer que, si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs non colinéaires, alors le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est orthogonal au plan $\mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$. Et que $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w})$ est une base directe.
5. Montrer que :
$$(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v})\,(\vec{w} \cdot \vec{w})\,.$$
En déduire que la norme du vecteur $\vec{v} \wedge \vec{w}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, autrement dit :
$$\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\,|\sin(\vec{v}, \vec{w})|.$$

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Soit λ une valeur propre complexe de la matrice A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.
En calculant $X^T \cdot A \cdot \overline{X}$, montrer que λ est imaginaire pur, autrement dit : que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$.
2. Montrer que les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles.
3. Vérifier que les matrices $I_n - A$ et $(I_n + A)^{-1}$ commutent.
4. Montrer que la matrice $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est orthogonale.
5. La matrice R appartient-elle à $SO_n(\mathbb{R})$?

Et aussi : les exercices 63,66,68,78 de la banque CCINP & l'exercice du DS n$^\circ$ 6 MPI/* 2024-2025.