COLLE N° 16

E.v.n.

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?
2. On note $SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant vaut 1. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2 (Mines Ponts PSI 2014)**.**

On munit l'*ev* $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$.

Soient $e \in E$ et $T_e \colon f \in E \mapsto \int_0^1 e(t)f(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

Montrer que T_e est une forme linéaire continue et calculer $|||T_e|||_\infty$, la norme de T_e subordonnée à $\| \ \|_\infty$.

Indication : Considérer $f_\varepsilon \colon t \mapsto \frac{e(t)}{|e(t)|+\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$.

Exercice 3 (CCP PSI 2015)**.**

Soit E l'espace des suites bornées à valeurs complexes. Montrer que les fonctions

$$N \,:\, u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \qquad \text{et} \qquad N' \,:\, u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}$$

sont bien définies et sont deux normes sur E. Sont-elles équivalentes ?