Colle 16 Espaces vectoriels normés

VERBAERE–MONNIER Lucas

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Soit F un espace vectoriel normé et A une partie de F. Quand dit-on que A est un ouvert de F ? Quand dit-on que A est un fermé de F ? $\mathbb{Q}$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$? un fermé ?
2. Démontrer que l'ensemble H des matrices diagonalisables de E est dense dans E. Ce résultat est-il encore valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? (On pourra, pour cette dernière question, traiter le cas où $n = 2$).
3. Démontrer que H n'est pas un ouvert de E et que son intérieur est l'ensemble H' des matrices diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont distinctes, en admettant que H' est un ouvert de E.
4. Montrer que H' est un ouvert de E.

Solution **1.**

1. *Cours...*
2. *Soit* T *une matrice triangulaire supérieure appartenant à* E *; et, pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, $D_p = \mathrm{Diag}\,(1/p, \cdots, n/p)$. *Si on note* $t_1, \cdots, t_n$ *les éléments de la diagonale de* T *et* $t'_1, \cdots, t'_n$ *ceux de* $D_p + T$*, on a alors, pour tout couple* (i, j)*,*
   - *si* $i = j$ *alors* $|t'_i - t'_j| = \frac{1}{p}\,(i-j) \neq 0$
   - *si* $i \neq j$ *alors*
     $|t'_i - t'_j| = |t_i - t_j - \frac{1}{p}\,(i-j)\,| \geq \underbrace{|t_i - t_j|}_{\neq 0} - \frac{1}{p}\underbrace{|i-j|}_{\neq 0} \neq 0$ *pour* p *assez grand. La matrice triangulaire* $D_p + T$ *est donc bien diagonalisable pour* p *assez grand.*

   Soit $M \in E$*, on sait que* M *est semblable à une matrice triangulaire supérieure* T *; on écrit donc* $M = P_0^{-1} T P_0$ *et on pose*
   $\forall p \geq K$, $N_p = P_0^{-1}(D_p + T)P_0$. N_p *est diagonalisable et, en prenant, par exemple, la norme définie par* $\|M\| = \max m_{ij}$*, on a :*
   $\|M - N_p\| = \|P_0^{-1} D_p P_0\| \leq \|P_0\|^2 \|D_p\|$ *c'est à dire* $\|M - N_p\| \leq \frac{\|P_0\|^2}{p}$ *ce qui prouve que* $\lim_{p \to +\infty} N_p = M$*. D'où la densité des matrices diagonalisables. Celà ne marche plus dans* $\mathbb{R}$ *car si on prend la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, elle n'est pas diagonalisable et s'il existait une suite* (M_p) *de matrices diagonalisables qui convergeait vers* A*, le discriminant du polynôme caractéristique (degré 2 !) de chaque* M_p *est positif ou nul car* M_p *étant diagonalisable, elle a au moins une valeur propre la suite de ces discriminants devrait, par continuité, converger vers -4 ; cela fournit une contradiction lorsque* $n = 2$.
3. *On va montrer que son complémentaire n'est pas un fermé en prenant une suite de matrices nilpotentes non nulles (donc non diagonalisables) qui converge vers une matrice diagonalisable. Si* $n = 2$*, il suffit de prendre la suite de matrices* $(M_p) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *qui converge vers la matrice nulle qui est diagonalisable. Pour* $n \geq 3$*, on prend la suite de matrices* (M_p) *dont tous les termes sont nuls sauf celui de la première ligne et deuxième colonne qui vaut* $\frac{1}{p}$.
   On prouve maintenant que $\mathring{H}$ *est l'ensemble* H' *des matrices diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont distinctes.*
   Soit M *une matrice diagonalisable ayant deux valeurs propres égales. Alors* M *n'est pas dans l'intérieur de* H *car on peut trouver une suite de matrice* (M_p) *qui converge vers* M *et qui ne sont pas diagonalisables. En effet :*
   Soit P *une matrice inversible telle que* $M = PDP^{-1}$ *où* D *est diagonale,*
   $$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},\ \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ posons } D_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
   Alors la suite (M_p) *définie par* $M_p = PD_pP^{-1}$ *converge vers* M *et chaque* M_p *n'est pas diagonalisable. Sinon,* D_p *serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas. On a donc prouvé que* $\mathring{H} \subset H' \subset H$ *et, puisqu'on admet que* H' *est un ouvert, on en déduit que* $\mathring{H} = H'$.
4. *Soit* $M \in H'$*. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite* (M_k) *de matrices à spectres non simples convergeant vers* M.
   Pour tout k*, on se donne* a_k *une racine commune de* χ_{M_k} *et* χ'_{M_k}*. Le tout est de voir que* (a_k) *est bornée, car si c'est le cas, en extrayant, on obtiendra par passage à la limite une racine commune à* χ_M *et* χ'_M*, d'où* $M \notin H'$*, et une contradiction. (au passage on utilise la continuité de* χ_A *vis-à-vis de* A*, et la continuité de* $P \mapsto P'$*)*
   (χ_{M_k}) *converge vers* χ_M*, donc les coefficients des* χ_{M_k} *sont bornés par une constante* C.
   En utilisant le caractère unitaire, on a $|\chi_{M_k}(x)| \geq f(|x|) = |x|^n - C|x|^{n-1} - \dots - C \to_{|x| \to +\infty} +\infty$*, d'où le résultat.*

LE GOFF Tobias

Exercice 2.

1. Montrer que $A \mapsto \chi_A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $S(A) = \{P^{-1}AP,\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ est fermé.
3. Montrer que si A admet pour valeur propre λ_1, ..., λ_r de multiplicité respectives n_1, ..., n_r, alors
   $\Omega = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix} \in \overline{S(A)}$.
   On pourra utiliser la matrice $\Delta = \mathrm{Diag}\,(\alpha, \cdots, \alpha^n)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Réciproque ?
4. Caractériser les matrices A pour lesquelles $S(A)$ est borné, fermé.

Solution **2.**

1. *Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}[X]$, $A \mapsto \chi_A$ est continue car les coefficients du polynôme caractéristique s'écrivent comme des polynômes en les coefficients de la matrice.*
2. *Soit une suite $(M_n = P_n^{-1}AP_n) \in S(A)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout n, $M_n = P_n^{-1}AP_n$ est semblable à A, donc est digonalisable de polynôme annulateur minimal scindé $p_A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Spec} A} (X - \lambda)$. Donc, pour tout $n\mathbb{N}$, $p_A(M_n) = 0$. Par continuité, $p_A(M) = 0$ et M est diagonalisable.*
3. *Soit A une matrice. Une base de trigonalisation montre qu'il existe $T \in S(A)$ triangulaire supérieure avec les λ_i appraissant n_i fois sur la diagonale. Si $T = (t_{i,j})$, alors $\Delta^{-1}T\Delta$ a pour coefficient $a^{j-i}t_{i,j}$ si $j \geq i$ et 0 sinon. Quand a tend vers 0, $\Delta^{-1}T\Delta$ tend vers Ω. Ceci qui montre qu'elle est dans $\overline{S(A)}$.*
   Réciproquement, Si $\Omega \in \overline{S(A)}$. Si $\Omega \in S(A)$, toutes les matrices de $S(A)$ sont semblables à Ω. Sinon, il existe $(M_n) \in S(A)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers Ω. Le polynôme caractéristique chi_{M_n} est constant donc $\chi_{M_n} = \chi_\Omega$.
4. *S'il existe une matrice non diagonale M dans $S(A)$, alors $\Delta^{-1}A\Delta$, montre que $S(A)$ est non bornée. Donc A n'est semblable qu'à des matrices diagonales : tout vecteur non nul est vecteur propre, c'est une homothétie. Enfn, une homothétie convient.*

AMIAUD Florian

Exercice 3. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On note $S = \{u \in \mathcal{L}(E),\, u^2 = Id_E\}$.

1. Montrer que id_E est un point isolé de S.
2. Déterminer tous les points isolés.
3. L'ensemble S est-il fermé ? borné ?

Solution **3.**

1. *Soit (u_n) une suite d'éléments de S convergeant vers Id_E. Comme u_n est une symétrie, $u_n = id_E$ ssi $\mathrm{tr} u_n = n$. La fonction trace étant continue et à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc est constante à partir d'un certain rang. On en déduit que Id_E est un point isolé.*
2. *Le même raisonnement montre que $-Id_E$ est un point isolé. Soit $u \in S$, $u \neq \pm Id_E$. Soit e_1 un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et e_2 associé à la valeur propre -1 que l'on complète une base de vecteurs de u dans $E_1(u)$ puis dans $E_{-1}(u)$. Relativement à cette base, la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & I_r & \\ & & & -I_{n-r-2} \end{pmatrix}$. On pose $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ -\alpha & -1 & & \\ & & I_r & \\ & & & -I_{n-r-2} \end{pmatrix}$. La suite tend vers u et u n'est pas un point isolé.*
3. *S est fermée comme l'image réciproque de $\{0\}$ par $u \mapsto u^2 - id_E$. Mais n'est pas bornée comme le montre l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ \alpha & -1 & \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix}$ en faisant tendre α vers $+\infty$. On aurait pu se limiter aux symétries orthogonales.*

XXX

<u>Exercice 4.</u> Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de $E, f : [0,1] \to E$ continue. On suppose que $f(0) \in A$ et $f(1) \in E \backslash A$. Montrer que $f([0,1]) \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.

Solution **4.** *On définit deux suites réelles* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *par récurrence. On pose* $u_0 = 0$ *et* $v_0 = 1$. *Par hypothèse,* $f(u_0) \in A$ *et* $f(v_0) \in E \setminus A$. *Supposons* u_n *et* v_n *construits tels que* $u_n \leq v_n$, $f(u_n) \in A$ *et* $f(v_n) \in E \setminus A$. *Posons* $m_n = (u_n + v_n)/2$.

— *Si* $f(m_n) \in A$, *on pose* $u_{n+1} = m_n$ *et* $v_{n+1} = v_n$.

— *Si* $f(m_n) \in E \setminus A$, *on pose* $u_{n+1} = u_n$ *et* $v_{n+1} = m_n$.

Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$, *et les propriétés* $f(u_n) \in A$ *et* $f(v_n) \in E \setminus A$ *sont maintenues. La suite* (u_n) *est croissante et majorée par* $v_0 = 1$. *La suite* (v_n) *est décroissante et minorée par* $u_0 = 0$. *Elles sont donc convergentes. De plus,* $v_n - u_n = \frac{v_{n-1}-u_{n-1}}{2} = \cdots = \frac{v_0-u_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}$. *Comme* $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0$, *les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite* $l \in [0, 1]$.

Puisque f *est continue sur* $[0, 1]$ *et que* $u_n \to l$ *et* $v_n \to l$, *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(l)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(v_n) = f(l)$$

Pour tout n, $f(u_n) \in A$. *Par définition de l'adhérence, la limite d'une suite d'éléments de* A *est dans l'adhérence de* A, *notée* $\overline{A}$. *Donc* $f(l) \in \overline{A}$. *Pour tout* n, $f(v_n) \in E \setminus A$. *De même, la limite* $f(l)$ *appartient à l'adhérence de* $E \setminus A$, *notée* $\overline{E \setminus A}$. *On a donc* $f(l) \in \overline{A}$ *et* $f(l) \in \overline{E \setminus A}$. *Par définition de la frontière (ou adhérence) d'un ensemble,* $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$. *Ainsi,* $f(l) \in \mathrm{Fr}(A)$.

Comme $l \in [0, 1]$, *le point* $f(l)$ *appartient à l'image de l'intervalle* $[0, 1]$ *par* f, *soit* $f(l) \in f([0, 1])$. *Nous avons donc trouvé un point* $f(l)$ *qui est dans* $f([0, 1])$ *et dans* $\mathrm{Fr}(A)$. *L'intersection* $f([0, 1]) \cap \mathrm{Fr}(A)$ *est donc non vide.*