Corrigé de la colle n° 15

Variables aléatoires & e.v.n.

24 janvier 2026

Exercice 1 (Oral Mines Ponts PSI 2016)**.** Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2a$ boules blanches et a boules noires indiscernables. On effectue une suite de tirages, avec remise, d'une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués lorsqu'on obtient pour la première fois deux boules noires lors de deux tirages consécutifs.

1. Élaborer une relation de récurrence d'ordre 2 satisfaite par la suite $(P(X \geqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que la variable aléatoire X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X, *id est* calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

1. (a) On note B_n l'événement « on tire une boule blanche au n-ème tirage ».

   Soit $n \in \mathbb{N}$. L'événement $(X \geqslant n)$ est l'événement « il n'y a pas eu 2 boules noires consécutives au cours des $n-1$ premiers tirages ». D'où $P(X \geqslant 1) = P(X \geqslant 2) = 1$.

   (b) Établissons la relation de récurrence.

   Kdo du 21/11/2025

   Première méthode — (On procède comme dans le ~~DS~~ n° 4, *i.e.* on conditionne par les premiers tirages, ce qui remet le compteur à zéro.) Pour tout $n \geq 3$,

   $$(X \geqslant n) = ((X \geqslant n) \cap B_1) \bigcup \left((X \geqslant n) \cap \overline{B_1}\right),$$

   et cette union est disjointe, donc les probabilités s'ajouteront.

   D'une part, $P\left((X \geqslant n) \cap B_1\right) = P(B_1) \cdot P(X \geqslant n \mid B_0) = \frac{2}{3} \cdot P(X \geqslant n-1)$ car on sait que la première boule tirée est blanche, ce qui remet le compteur à zéro.

   D'autre part, $(X \geqslant n) \cap \overline{B_1} = \left[(X \geqslant n) \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right] \bigcup \left[(X \geqslant n) \cap \overline{B_1} \cap B_2\right] = (X \geqslant n) \cap \overline{B_1} \cap B_2$ car le premier événement de l'union est impossible. Enfin $P((X \geqslant n) \cap \overline{B_1} \cap B_2) = P(\overline{B_1} \cap B_2) \cdot P(X \geqslant n \mid \overline{B_1} \cap B_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} \cdot P(X \geq n-2)$ car on sait que la deuxième boule tirée est blanche, ce qui remet le compteur à zéro. Donc

   $$P(X \geqslant n) = \frac{2}{3}P(X \geqslant n-1) + \frac{2}{9}P(X \geqslant n-2).$$

   Seconde méthode — Pour tout $n \geqslant 3$,

   $$(X \geqslant n) = ((X \geqslant n) \cap B_{n-1}) \bigcup \left((X \geqslant n) \cap \overline{B_{n-1}}\right),$$

   et cette union est disjointe, donc les probabilités s'ajouteront. De plus $(X \geqslant n) \cap B_{n-1} = (X \geqslant n-1) \cap B_{n-1}$, et $(X \geqslant n) \cap \overline{B_{n-1}} = (X \geqslant n-2) \cap B_{n-2} \cap \overline{B_{n-1}}$, d'où, par indépendance des tirages successifs,

   $$P(X \geqslant n) = \frac{2}{3}P(X \geqslant n-1) + \frac{2}{9}P(X \geqslant n-2).$$

   (c) L'équation caractéristique $r^2 = \frac{2}{3}r + \frac{2}{9}$ de la relation de récurrence ci-dessus a pour solutions $\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}$, donc

   $$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geqslant n) = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n,$$

   et $\alpha(\frac{1-\sqrt{3}}{3}) + \beta(\frac{1+\sqrt{3}}{3}) = P(X \geqslant 1) = 1$, et $\alpha(\frac{1-\sqrt{3}}{3})^2 + \beta(\frac{1+\sqrt{3}}{3})^2 = P(X \geqslant 2) = 1$, *id est* après calculs $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ et $\beta = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

(d) $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(X \geqslant n) = (X = n) \cup (X \geqslant n+1)$. Cette union étant disjointe, la loi de X est donnée par :

$$\forall\, n \in X(\Omega), \quad P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1) = \cdots = \frac{3+\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^n,$$

cette formule étant encore valable pour $n = 1$.

2. La v.a. X étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est d'espérance finie *SSI* la série $\sum P(X \geqslant n)$ converge, auquel cas $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n)$.

   Or on vérifie que $|\frac{1\pm\sqrt{3}}{3}| < 1$, donc les séries géométriques $\sum(\frac{1\pm\sqrt{3}}{3})^n$ convergent. Ainsi la série $\sum P(X \geqslant n)$ est convergente car c'est une superposition (=une combinaison linéaire) de deux séries convergentes. Et

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n) = \frac{3-\sqrt{3}}{4}\,\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1-\sqrt{3}}{3}} + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\,\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1+\sqrt{3}}{3}} = \cdots = 12.$$

Exercice 2. Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$.

Soient N_1 et N_2 les applications définies de E vers $\mathbb{R}$ par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in E,\ N_2(f) \leq \alpha \cdot N_1(f)$.
3. Montrer que, pour tout $f \in E$,

$$f(x) = e^{-x}\int_0^x [f(t) + f'(t)]\, \mathrm{e}^t dt.$$

4. En déduire que les deux normes sont équivalentes.

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$.

Soient N_1 et N_2 les applications définies de E vers $\mathbb{R}$ par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. L'ensemble des fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. De plus, la fonction nulle appartient à E. Et une combinaison linéaire de fonctions :
   — de classe $\mathcal{C}^1$ est encore de classe $\mathcal{C}^1$;
   — égales à 0 en 0 est encore égale à 0 en 0.

   Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$.

   Autre méthode — L'ensemble E est le noyau de la forme linéaire $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(0)$, c'est donc un *sev* de l'*ev* $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

   Si $f \in E$, alors f' est continue sur le segment $[0,1]$, d'où f' est bornée, donc la fonction N_1 est bien définie sur E. C'est une norme car :
   — $N_1(f) = 0_{\mathbb{R}} \implies \|f'\|_\infty = 0 \implies \forall x \in [0,1],\ f'(x) = 0$. D'où la fonction f est constante sur l'intervalle $[0,1]$. Or $f(0) = 0$. D'où $\forall x \in [0,1], f(x) = 0$. Donc $f = 0_E$.
   — elle vérifie l'inégalité triangulaire car la norme $\|\cdot\|_\infty$ la vérifie.

   Si $f \in E$, alors les fonctions f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$, d'où $f + f'$ est bornée, donc la fonction N_2 est bien définie sur E. C'est une norme car :
   — $N_2(f) = 0_{\mathbb{R}} \implies \|f + f'\|_\infty = 0 \implies \forall x \in [0,1],\ f(x) + f'(x) = 0 \implies \exists C \in RR,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) = C \cdot \mathrm{e}^{-x}$. Or $f(0) = 0$, d'où $C = 0$. D'où $\forall x \in [0,1], f(x) = 0$. Donc $f = 0_E$.
   — elle vérifie l'inégalité triangulaire car la norme $\|\cdot\|_\infty$ la vérifie.
2. Soit $f \in E$: $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Or $\forall x \in [0,1],\ f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$, d'où $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$ (car $f(0) = 0$), d'où $|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)|\,dt \leq |x - 0| \times \|f'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$ (car $x \in [0,1]$), d'où $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$. Donc $N_2 \leq 2 \cdot N_1$.
3. Soit $f \in E$: $\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{e}^t dt = \left[f(t)\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x f(t)\mathrm{e}^t dt$ en intégrant par partie. Or $\left[f(t)\mathrm{e}^t\right]_0^x = f(x)\mathrm{e}^x$ car $f(0) = 0$. D'où $\displaystyle\int_0^x \left[f(t) + f'(t)\right] e^t dt = f(x)\mathrm{e}^x$. Donc $f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x \left[f(t) + f'(t)\right] \mathrm{e}^t dt$.

4. $|f(x)| \leq e^{-x} \int_0^x \left|f(t)+f'(t)\right| \mathrm{e}^t dt \leq \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \left|f(t)+f'(t)\right| \mathrm{e}^x dt \leq \int_0^x \left|f(t)+f'(t)\right| dt \leq |x| \times \|f+f'\|_\infty \leq \|f+f'\|_\infty$.
D'où $\|f\|_\infty \leq \|f+f'\|_\infty$.

Or $f' = f + f' - f$, d'où $\|f'\|_\infty \leq \|f+f'\|_\infty + \|f\|_\infty$. Donc $N_1 \leq 2N_2$.

Exercice 3. On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum |u_n|$ converge, ℓ^2 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum u_n^2$ converge et ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que ℓ^1, ℓ^2 et ℓ^∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et que $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$.
2. On définit sur ℓ^1 trois normes par :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad , \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

pour tout $u \in \ell^1$.

(a) Déterminer, s'il existe, le plus petit réel α tel que $\forall u \in \ell^1,\ \|u\|_\infty \leq \alpha \cdot \|u\|_1$.

(b) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

(c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ? Et les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$?

---

1. Si la série numérique $\sum |u_n|$ converge, alors la suite u_n tend vers 0, d'où : à partir d''un certain rang, $|u_n| \leq 1$ et alors $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$, d'où la convergence de la série $\sum u_n^2$. Donc $\ell^1 \subset \ell^2$.

   Si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite u_n^2 tend vers 0 et la suite u_n tend donc aussi vers 0. La suite u_n est donc convergente, or toute suite convergente est bornée, donc la suite u_n est bornée. Donc $\ell^2 \subset \ell^\infty$.

   La suite nulle appartient à ℓ^1, à ℓ^2 et à ℓ^∞. Reste à montrer que ces ensembles sont stables par combinaisons linéaires, ce qui en fera des *sev* de l'*ev* $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Soient λ et μ deux réels :

   — Si les suites u_n et v_n sont bornées, alors il existe des réels U et V tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq U$ et $|v_n| \leq V$. D'où $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| U + |\mu| V$ est majorée, donc ℓ^∞ est un *sev*.

   — Si les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent, alors la série $\sum |\lambda u_n + \mu v_n|$ converge aussi car $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda||u_n| + |\mu||v_n|$. Donc ℓ^1 est un *sev*.

   — Si les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent, alors il en est de même de la série $\sum |u_n v_n|$ car $0 \leq |u_n v_n| \leq \frac{u_n^2+v_n^2}{2}$ car $(|u_n| - |v_n|)^2 \geq 0$. On en déduit que la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge car $(\lambda u_n + \mu v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda\mu u_n v_n + \mu^2 u_n^2$ et les trois séries $\sum u_n^2$, $\sum v_n^2$ et $\sum u_n v_n$ convergent. Donc ℓ^2 est un *sev* ▷ **voir la même question sur L_2 dans l'exo 4 du chapitre VIII**.

2. (a) Pour toute suite $u \in E$, $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \|u\|_1$ qui est un majorant et le sup est le plus petit majorant. D'où $\alpha = 1$ convient, de plus c'est le plus petit réel possible car la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0$ appartient à ℓ^1 et vérifie l'égalité $\|u\|_\infty = \|u\|_1$.

   (b) Soit, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(N)}$ définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^{(N)} = 1 \quad \text{si} \quad n \leq N \quad \text{et} \quad u^{(N)} = 0 \quad \text{si} \quad n > N.$$

   Chaque suite $u^{(N)}$ appartient bien à ℓ^1 et

   $$\|u^{(N)}\|_1 = N + 1 \qquad , \qquad \|u^{(N)}\|_\infty = 1.$$

   Par l'absurde : supposons qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall u \in \ell_1,\ \|u\|_1 \leq \|u\|_\infty$. En particulier, $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \|u^{(N)}\|_1 \leq \beta \cdot \|u^{(N)}\|_\infty$. C'est absurde. Donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.

   (c) En utilisant les mêmes suites $u^{(N)}$, on montre de même qu'aucune de ces normes n'est équivalente à l'autre car :

   $$\|u^{(N)}\|_1 = N + 1 \qquad , \qquad \|u^{(N)}\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|u^{(N)}\|_2 = \sqrt{N+1}.$$