Corrigé du Kdo du 2 / 02 / 2026

E.v.n.

2 février 2026

Exercice (distance d'un vecteur à un ensemble)**.**

Soit A une partie non vide d'un *evn* E. Pour tout vecteur $x \in E$, on appelle *distance de* x *à* A et on note $d(x, A)$ le réel

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

1. Justifier que le réel $d(x, A)$ est bien défini.
2. Montrer que la distance de x à A est nulle si, et seulement si, x est adhérent à A, *i.e.*

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}.$$

3. Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que : $\forall a \in A,\ d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - a\|$. En déduire que :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

Qu'en déduire sur l'application $x \mapsto d(x, A)$?

4. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \left\{x \in E \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}$.
   (a) Montrer que l'ensemble A_n est un ouvert de E et déterminer l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.
   (b) En déduire que tout fermé de E est une intersection dénombrable d'ouverts. Et que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.
5. On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. Soit A l'ensemble des fonctions f de E telles que :

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f(t)dt = 1.$$

   (a) Montrer que l'ensemble A est un fermé de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
   (b) Montrer que la distance de la fonction nulle à l'ensemble A est égale à 1 : $d(0, A) = 1$.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in A$ telle que $d(0, A) = \|f - 0\|_\infty$ (autrement dit : montrer que cet *inf* n'est pas un *min*).

---

1. Soit un vecteur $x \in E$: l'ensemble $\{\|x - a\|, a \in A\}$ est une partie minorée et non vide de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure $\inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$. Donc le réel $d(x, A)$ est bien défini.
2. La borne inférieure $d(x, A)$ est le plus grand des minorants, c'est donc :
   — un minorant, *i.e.* $\forall a \in A,\ d(x, A) \leq \|x - a\|$;
   — le plus grand, *i.e.* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \|x - a\| < d(x, a) + \varepsilon$.

   Par suite

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \|x - a\| < \varepsilon \\ &\iff \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a \in B(x, \varepsilon) \\ &\iff \quad \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \\ &\iff \quad x \in \overline{A} \end{aligned}$$

3. Soit $a \in A$: $\begin{cases} d(x,A) \leq \|x-a\| \\ \|x-a\| \leq \|x-y\| + \|y-a\| \text{ d'après l'inégalité triangulaire.} \end{cases}$

   Donc $\forall a \in A,\ d(x,A) \leq \|x-y\| + \|y-a\| \quad (\heartsuit)$.

   On veut montrer que $-\|x-y\| \leq d(x,A) - d(y,A) \leq +\|x-y\|$, c'est-à-dire que : $\begin{cases} d(x,A) - d(y,A) \leq \|x-y\| & (1) \\ d(y,A) - d(x,A) \leq \|x-y\| & (2) \end{cases}$

   De $(\heartsuit)$, on déduit que : $\forall a \in A,\ d(x,A) - \|x-y\| \leq \|y-a\|$ et donc que le réel $d(x,A) - \|x-y\|$ est un minorant de l'ensemble $\{\|y-a\|,\ a \in A\}$. Ce minorant est inférieur au plus grand des minorants, qui est $d(y,A)$. Donc $d(x,A) - \|x-y\| \leq d(y,A)$, ce qui prouve l'inégalité (1). L'inégalité (2) est la même, après échange de x et de y.

   L'inégalité $|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$ a été prouvée pour tout $(x,y) \in E^2$. On en déduit que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est $1-$lipschitzienne et, par suite, qu'elle est continue.

4. (a) L'ensemble $A_n = \left\{x \in E \mid d(x,A) < \frac{1}{n}\right\}$ est l'image réciproque de l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{n}[$ par la fonction $f : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x,A)$. Or $]-\infty, \frac{1}{n}[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et l'application f est continue d'après la question précédente. Donc $A_n = f^{-1}\left(]-\infty, \frac{1}{n}[\right)$ est un ouvert de E.

   Soit $x \in E$: $x \in \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \in A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(x,A) < \frac{1}{n} \iff d(x,A) = 0.$

   Or $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$ d'après la question 2. Donc $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \overline{A}$.

   (b) Soit F un fermé de E. Alors F est égal à son adhérence $\overline{F}$. Et on vient de montrer que $\overline{F}$ est l'intersection dénombrable des ouverts F_n.

   Si O est un ouvert de E, alors son complémentaire $F = E \setminus O$ est un fermé. D'où $F = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$. Passons au complémentaire : $O = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$, où chaque O_n est le complémentaire de l'ouvert F_n et est donc un fermé.

5. Les réponses à la question 5 sont manuscrites dans les pages suivantes.

Merci à Arthur Lalé.

Question 5

$E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

a) Soient les trois applications suivantes

$$\varphi_1 : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto f(0)$$

$$\varphi_2 : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto f(1)$$

$$\varphi_3 : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$$

Ces trois applications sont linéaires oui

et $\forall f \in E$, $\begin{cases} |\varphi_1(f)| \leq \|f\|_\infty \\ |\varphi_2(f)| \leq \|f\|_\infty \end{cases}$

et $\forall f \in E$, $|\varphi_3(f)| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt$ par inégalité triangulaire

$$\leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,dt$$
$$\leq \|f\|_\infty$$

D'où ces trois applications sont continues sur E oui

D'où les images réciproques des fermés $\{0\}$ et $\{1\}$ par φ_1, φ_2 et φ_3 sont des fermés car ces applications sont continues

Or $A = \varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_3^{-1}(\{1\})$

~~Or~~ et ~~l'union finie~~ l'intersection de fermés est un fermé

D'où $\boxed{\text{A est un fermé}}$

oui

b) Soit $f \in A$

$$1 = \int_0^1 f(t)\,dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty = \|f - 0\|_\infty = \|0 - f\|_\infty$$

D'où 1 minore $\|0 - f\|_\infty$

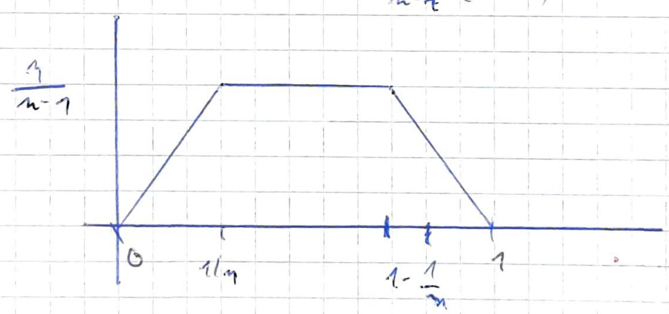
Or la borne inf est le plus grand des minorants

D'où $\boxed{1 \leq \inf\limits_{f \in A} (\|0 - f\|_\infty)}$

oui

On considère ensuite la suite de fonctions définie par (pour $n \geq 3$)

$$\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \begin{cases} \frac{n^2}{n-1} t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ \frac{n}{n-1} & \text{si } t \in]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[\\ \frac{n^2}{n-1}(1-t) & t \in [1 - \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$



~~Donc~~ $\forall n \geq 3 \quad f_n \in A$

car ✓ la fonction f_n est continue et $f_n(0) = f(1) = 0$

et $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{n}{n-1} \times (1 - \frac{1}{n}) = 1$

De plus $\|0 - f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \frac{n}{n-1}$

Bof [Donc la suite $(\|f_n\|_\infty)$ tend vers 1 en décroissant]

on D'où $\forall n$, $d(0, A) \leq \frac{n}{n-1}$ car l'inf est un minorant. Les inégalités larges passent à la limite $n \to \infty$, donc $d(0,A) \leq 1$.

D'où $\inf_{f \in A} \|0 - f\| = 1$

c'est-à-dire $\boxed{d(0, A) = 1}$

9) Par l'absurde : On suppose qu'il existe $f \in A$ tel que $d(0, A) = d(0, f)$

alors $\|f\|_\infty = 1$

~~Or ff~~ Or $f \in A$ d'où $\int_0^1 f(t)\,dt = 1$

Or $1 = \int_0^1 dt$

d'où $\int_0^1 (f(t) - 1)\,dt = 0$

Or la fonction $t \longmapsto f(t) - 1$ est continue oui et négative oui car $\forall t \in [0, 1]$ $f(t) \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty = 1$

D'où cette fonction est nulle d'où

$\forall t \in [0, 1], f(t) = 1$

D'où $f(0) = 1$ Or $f(0) = 0$ car $f \in A$

ce qui est absurde