

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 15

Variables aléatoires & e.v.n.

2 février 2026

Exercice 1 (Oral Mines Ponts PSI 2016). Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2a$ boules blanches et a boules noires indiscernables. On effectue une suite de tirages, avec remise, d'une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués lorsqu'on obtient pour la première fois deux boules noires lors de deux tirages consécutifs.

1. Élaborer une relation de récurrence d'ordre 2 satisfaite par la suite $(P(X \geq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que la variable aléatoire X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X , *id est* calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) On note B_n l'événement « on tire une boule blanche au n -ème tirage ».

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'événement $(X \geq n)$ est l'événement « il n'y a pas eu 2 boules noires consécutives au cours des $n-1$ premiers tirages ». D'où $(X \geq 1) = (X \geq 2) = \Omega$, donc $P(X \geq 1) = P(X \geq 2) = 1$.

- (b) Établissons la relation de récurrence.

PREMIÈRE MÉTHODE — (On procède comme dans le Kdo du 21/11/2025, *i.e.* on conditionne par les premiers tirages, ce qui remet le compteur à zéro.) Pour tout $n \geq 3$,

$$(X \geq n) = ((X \geq n) \cap B_1) \cup ((X \geq n) \cap \overline{B_1}),$$

et cette union est disjointe, donc les probabilités s'ajoutent.

D'une part, $P((X \geq n) \cap B_1) = P(B_1) \cdot P(X \geq n \mid B_1) = \frac{2}{3} \cdot P(X \geq n-1)$ car on sait que la première boule tirée est blanche, ce qui remet le compteur à zéro.

D'autre part, $(X \geq n) \cap \overline{B_1} = [(X \geq n) \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}] \cup [(X \geq n) \cap \overline{B_1} \cap B_2] = (X \geq n) \cap \overline{B_1} \cap B_2$ car le premier événement de l'union est impossible. Enfin $P((X \geq n) \cap \overline{B_1} \cap B_2) = P(\overline{B_1} \cap B_2) \cdot P(X \geq n \mid \overline{B_1} \cap B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot P(X \geq n-2)$ car on sait que la deuxième boule tirée est blanche, ce qui remet le compteur à zéro. Donc

$$P(X \geq n) = \frac{2}{3}P(X \geq n-1) + \frac{2}{9}P(X \geq n-2).$$

SECONDE MÉTHODE — Pour tout $n \geq 3$,

$$(X \geq n) = ((X \geq n) \cap B_{n-1}) \cup ((X \geq n) \cap \overline{B_{n-1}}),$$

et cette union est disjointe, donc les probabilités s'ajoutent. De plus $(X \geq n) \cap B_{n-1} = (X \geq n-1) \cap B_{n-1}$, et $(X \geq n) \cap \overline{B_{n-1}} = (X \geq n-2) \cap B_{n-2} \cap \overline{B_{n-1}}$, d'où, par indépendance des tirages successifs,

$$P(X \geq n) = \frac{2}{3}P(X \geq n-1) + \frac{2}{9}P(X \geq n-2).$$

- (c) L'équation caractéristique $r^2 = \frac{2}{3}r + \frac{2}{9}$ de la relation de récurrence ci-dessus a pour solutions $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{3}$, donc

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geq n) = \alpha \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{3} \right)^n + \beta \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{3} \right)^n,$$

et $\alpha \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{3} \right) + \beta \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{3} \right) = P(X \geq 1) = 1$, et $\alpha \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{3} \right)^2 + \beta \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{3} \right)^2 = P(X \geq 2) = 1$, *id est* après calculs $\alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$ et $\beta = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$.

(d) $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(X \geq n) = (X = n) \cup (X \geq n + 1)$. Cette union étant disjointe, la loi de X est donnée par :

$$\forall n \in X(\Omega), \quad P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n + 1) = \dots = \frac{3 + \sqrt{3}}{12} \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{3} \right)^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{12} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{3} \right)^n,$$

cette formule étant encore valable pour $n = 1$.

2. La v.a. X étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est d'espérance finie SSI la série $\sum P(X \geq n)$ converge, auquel cas $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

Or on vérifie que $|\frac{1 \pm \sqrt{3}}{3}| < 1$, donc les séries géométriques $\sum (\frac{1 \pm \sqrt{3}}{3})^n$ convergent. Ainsi la série $\sum P(X \geq n)$ est convergente car c'est une superposition (=une combinaison linéaire) de deux séries convergentes. Et

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \frac{\frac{1 - \sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1 - \sqrt{3}}{3}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{4} \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1 + \sqrt{3}}{3}} = \dots = 12.$$

Exercice 2. Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$.

Soient N_1 et N_2 les applications définies de E vers $\mathbb{R}$ par

$$N_1(f) = \|f'\|_{\infty} \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_{\infty}.$$

- Montrer que E est un espace vectoriel et que N_1 et N_2 sont des normes sur E .
- Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall f \in E, N_2(f) \leq \alpha \cdot N_1(f)$.
- Montrer que, pour tout $f \in E$,

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x [f(t) + f'(t)] e^t dt.$$

- En déduire que les deux normes sont équivalentes.

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = 0$.

Soient N_1 et N_2 les applications définies de E vers $\mathbb{R}$ par

$$N_1(f) = \|f'\|_{\infty} \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_{\infty}.$$

- L'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. De plus, la fonction nulle appartient à E . Et une combinaison linéaire de fonctions :
 - de classe $\mathcal{C}^1$ est encore de classe $\mathcal{C}^1$;
 - égales à 0 en 0 est encore égale à 0 en 0.

Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$.

AUTRE MÉTHODE — L'ensemble E est le noyau de la forme linéaire $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$, c'est donc un *sev* de l'ev $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Si $f \in E$, alors f' est continue sur le segment $[0, 1]$, d'où f' est bornée, donc la fonction N_1 est bien définie sur E . C'est une norme car :

- $N_1(f) = 0_{\mathbb{R}} \implies \|f'\|_{\infty} = 0 \implies \forall x \in [0, 1], f'(x) = 0$. D'où la fonction f est constante sur l'intervalle $[0, 1]$. Or $f(0) = 0$. D'où $\forall x \in [0, 1], f(x) = 0$. Donc $f = 0_E$.
- elle vérifie l'inégalité triangulaire car la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ la vérifie.

Si $f \in E$, alors les fonctions f et f' sont continues sur le segment $[0, 1]$, d'où $f + f'$ est bornée, donc la fonction N_2 est bien définie sur E . C'est une norme car :

- $N_2(f) = 0_{\mathbb{R}} \implies \|f + f'\|_{\infty} = 0 \implies \forall x \in [0, 1], f(x) + f'(x) = 0 \implies \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], f(x) = C \cdot e^{-x}$. Or $f(0) = 0$, d'où $C = 0$. D'où $\forall x \in [0, 1], f(x) = 0$. Donc $f = 0_E$.
- elle vérifie l'inégalité triangulaire car la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ la vérifie.

- Soit $f \in E : N_2(f) = \|f + f'\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$. Or $\forall x \in [0, 1], f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$, d'où $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$ (car $f(0) = 0$), d'où $|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq |x - 0| \times \|f'\|_{\infty} \leq \|f'\|_{\infty}$ (car $x \in [0, 1]$), d'où $\|f\|_{\infty} \leq \|f'\|_{\infty}$. Donc $N_2 \leq 2 \cdot N_1$.

- Soit $f \in E : \int_0^x f'(t) e^t dt = [f(t) e^t]_0^x - \int_0^x f(t) e^t dt$ en intégrant par partie. Or $[f(t) e^t]_0^x = f(x) e^x$ car $f(0) = 0$. D'où $\int_0^x [f(t) + f'(t)] e^t dt = f(x) e^x$. Donc $f(x) = e^{-x} \int_0^x [f(t) + f'(t)] e^t dt$.

4. $|f(x)| \leq e^{-x} \int_0^x |f(t) + f'(t)| e^t dt \leq e^{-x} \int_0^x |f(t) + f'(t)| e^x dt \leq \int_0^x |f(t) + f'(t)| dt \leq |x| \times \|f + f'\|_\infty \leq \|f + f'\|_\infty$.
D'où $\|f\|_\infty \leq \|f + f'\|_\infty$.
Or $f' = f + f' - f$, d'où $\|f'\|_\infty \leq \|f + f'\|_\infty + \|f\|_\infty$. Donc $N_1 \leq 2N_2$.

Exercice 3. On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum |u_n|$ converge, ℓ^2 l'ensemble des suites réelles u telles que $\sum u_n^2$ converge et ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées.

- Montrer que ℓ^1 , ℓ^2 et ℓ^∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et que $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$.
- On définit sur ℓ^1 trois normes par :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|, \quad \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

pour tout $u \in \ell^1$.

- Déterminer, s'il existe, le plus petit réel α tel que $\forall u \in \ell^1, \|u\|_\infty \leq \alpha \cdot \|u\|_1$.
- Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
- Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ? Et les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$?

- Si la série numérique $\sum |u_n|$ converge, alors la suite u_n tend vers 0, d'où : à partir d'un certain rang, $|u_n| \leq 1$ et alors $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$, d'où la convergence de la série $\sum u_n^2$. Donc $\ell^1 \subset \ell^2$.

Si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite u_n^2 tend vers 0 et la suite u_n tend donc aussi vers 0. La suite u_n est donc convergente, or toute suite convergente est bornée, donc la suite u_n est bornée. Donc $\ell^2 \subset \ell^\infty$.

La suite nulle appartient à ℓ^1 , à ℓ^2 et à ℓ^∞ . Reste à montrer que ces ensembles sont stables par combinaisons linéaires, ce qui en fera des *sev* de l'ev $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Soient λ et μ deux réels :

- Si les suites u_n et v_n sont bornées, alors il existe des réels U et V tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq U$ et $|v_n| \leq V$. D'où $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda|U + |\mu|V$ est majorée, donc ℓ^∞ est un *sev*.
- Si les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent, alors la série $\sum |\lambda u_n + \mu v_n|$ converge aussi car $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda||u_n| + |\mu||v_n|$. Donc ℓ^1 est un *sev*.
- Si les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent, alors il en est de même de la série $\sum |u_n v_n|$ car $0 \leq |u_n v_n| \leq \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}$ car $(|u_n| - |v_n|)^2 \geq 0$. On en déduit que la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge car $(\lambda u_n + \mu v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda\mu u_n v_n + \mu^2 v_n^2$ et les trois séries $\sum u_n^2$, $\sum v_n^2$ et $\sum u_n v_n$ convergent. Donc ℓ^2 est un *sev* ▷ voir la même question sur L_2 dans l'exo 4 du chapitre VIII.

- Pour toute suite $u \in E$, $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \|u\|_1$ qui est un majorant et le sup est le plus petit majorant. D'où $\alpha = 1$ convient, de plus c'est le plus petit réel possible car la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$ appartient à ℓ^1 et vérifie l'égalité $\|u\|_\infty = \|u\|_1$.
 - Soit, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, la suite $u^{(N)}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^{(N)} = 1 \quad \text{si} \quad n \leq N \quad \text{et} \quad u_n^{(N)} = 0 \quad \text{si} \quad n > N.$$

Chaque suite $u^{(N)}$ appartient bien à ℓ^1 et

$$\|u^{(N)}\|_1 = N + 1, \quad \|u^{(N)}\|_\infty = 1.$$

Par l'absurde : supposons qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall u \in \ell^1, \|u\|_1 \leq \beta \|u\|_\infty$. En particulier, $\forall N \in \mathbb{N}, \|u^{(N)}\|_1 \leq \beta \cdot \|u^{(N)}\|_\infty$. C'est absurde. Donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.

- En utilisant les mêmes suites $u^{(N)}$, on montre de même qu'aucune de ces normes n'est équivalente à l'autre car :

$$\|u^{(N)}\|_1 = N + 1, \quad \|u^{(N)}\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|u^{(N)}\|_2 = \sqrt{N + 1}.$$